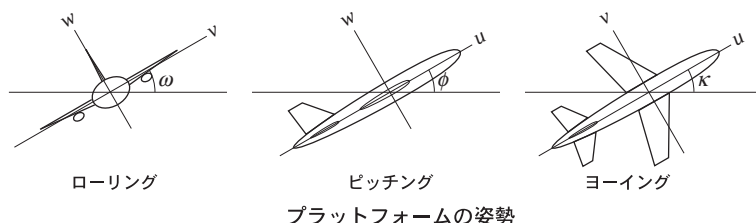


カメラの幾何学 2 (外部標定)

1 プラットフォームの姿勢

カメラを用いて計測する場合，カメラを何に搭載して計測するかは様々である．手にカメラを持って撮影する場合から，飛行機や人工衛星に搭載する場合もある．このようにカメラを搭載するものをプラットフォームと呼んでいる．計測する際には，このプラットフォームの位置と姿勢が解らなければ計測できない．プラットフォームの位置は，三次元の平面直角座標 (X_0, Y_0, Z_0) で表すことが出来る．プラットフォームの姿勢は，各座標軸の回転角で表し，それぞれ (ω, ϕ, κ) で表す．

自動車や飛行機・人工衛星等，移動体をプラットフォームとする時は，プラットフォームの姿勢を表すために，進行方向を u 軸とし，それに対して水平で進行方向に向かって右方向を v 軸，天頂方向を w 軸としている．そして，それぞれの軸に関する角度は，ローリング角 ω ，ピッチング角 ϕ ，ヨーイング角 κ で表すことが多い．それぞれの角度は，地上座標での X 軸， Y 軸， Z 軸からの角度で表す．下図は，その概念図を示したものである．



プラットフォームの位置を原点とするプラットフォームの座標系 (u, v, w) で示されているベクトルを，地上座標系 (x, y, z) で表すには，回転行列を用いて以下の式で表すことが出来る．

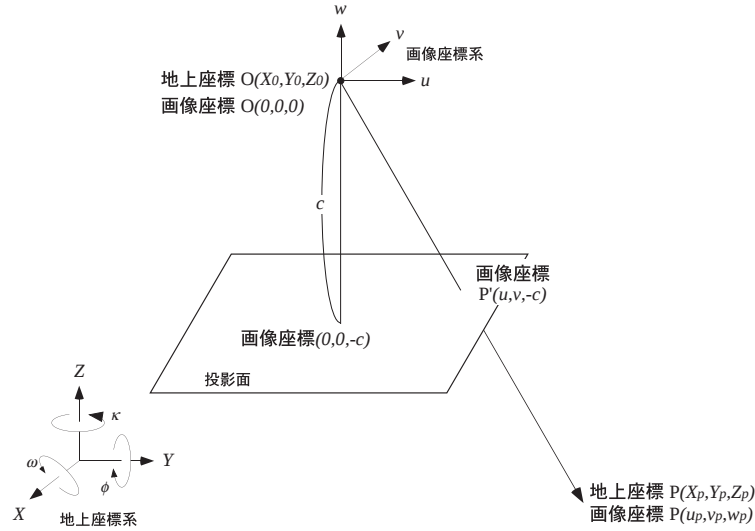
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで，注意しなければならないのが回転の順番と角度の符号である．特に行列演算においては，交換の法則が成り立たないため注意が必要で，この場合 Z 軸， Y 軸， X 軸の順で回転させている．逆に地上座標系 (x, y, z) をプラットフォームの座標系 (u, v, w) で表すには，逆行列を用いれば良いが，直交座標系の回転行列においては，逆向きの角度で逆の順に回転させることと同等になる．したがって，次式を用いて表すことが出来る．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\kappa) & -\sin(-\kappa) & 0 \\ \sin(-\kappa) & \cos(-\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & 0 & \sin(-\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\phi) & 0 & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\omega) & -\sin(-\omega) \\ 0 & \sin(-\omega) & \cos(-\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2)$$

2 共線条件式

三次元の地上座標で与えられたある物体の位置 $P(X_p, Y_p, Z_p)$ をカメラで撮影した場合，カメラの投影中心を原点とするカメラ座標においては， (u_p, v_p, w_p) となり，レンズの焦点距離を c とすると投影面上では $(u, v, -c)$ に投影される．下の図は，その概念を示したものである．



この地上座標 (X_p, Y_p, Z_p) とカメラ座標 (u_p, v_p, w_p) との関係は，地上座標系でのカメラの位置 $O(X_0, Y_0, Z_0)$ ，姿勢つまり各座標軸における回転角 $(\omega, \varphi, \kappa)$ が解れば変換式を導くことが出来る．つまり，カメラの投影中心から撮影された物体へのベクトルを考えると，カメラ座標系でのベクトルの成分 (u_p, v_p, w_p) と地上座標系でのベクトルの成分 $(X_p - X_0, Y_p - Y_0, Z_p - Z_0)$ は，以下の関係が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p - X_0 \\ Y_p - Y_0 \\ Z_p - Z_0 \end{pmatrix}$$

この変換式を単純化するために，三軸それぞれの回転行列を $a_{11} \sim a_{33}$ を要素とする一つの行列で表すと，以下の式となる．

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p - X_0 \\ Y_p - Y_0 \\ Z_p - Z_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

次に，レンズの焦点距離 c にしたがって，物体 P が投影面上のどこに現れるかを計算する．投影面上の P の位置 (u, v) は， $\overrightarrow{OP}$ 上にあり，その比は $\frac{c}{w_p}$ となる．カメラの座標系において w 軸が上向きの場合，焦点距離 c による投影面の位置は，負の方向に置いた方が考えやすいため，この状況を想定

すると、以下の式を得る．

$$u = -\frac{c}{w_p}u_p = -c \frac{a_{11}(x_p - x_0) + a_{12}(y_p - y_0) + a_{13}(z_p - z_0)}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (4)$$

$$v = -\frac{c}{w_p}v_p = -c \frac{a_{21}(x_p - x_0) + a_{22}(y_p - y_0) + a_{23}(z_p - z_0)}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (5)$$

この式は、共線条件式と呼ばれており、写真測量においては極めて重要な式である．この式におけるカメラの位置 (x_0, y_0, z_0) と姿勢の値 $(\omega, \varphi, \kappa)$ は、未知数であるため、基準点データを用いて求めることが一般的である．基準点データは、撮影された物体のカメラ座標 $(u, v, -c)$ と対応する地上座標 (x_p, y_p, z_p) が既知の点が少なくとも 3 個必要となる．基準点データを共線条件式に代入しても非線形の方程式のため、通常の変立方程式で解くことは出来ない．したがって、テイラー展開を使って逐次計算をすることにより近似値を求めることになる．例えば、関数 $f(x)$ に関して、テイラー級数に展開すると以下ようになる．

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (6)$$

ここで、 $f^{(n)}(a)$ は、 $f(a)$ の n 階導関数を表している．これを利用して近似値を求める．

そのためにはまず、変換式を次のように関数として置き換える．

$$F_u(x_0, y_0, z_0, \omega, \varphi, \kappa) = -c \frac{a_{11}(x_p - x_0) + a_{12}(y_p - y_0) + a_{13}(z_p - z_0)}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} - u \quad (7)$$

$$F_v(x_0, y_0, z_0, \omega, \varphi, \kappa) = -c \frac{a_{21}(x_p - x_0) + a_{22}(y_p - y_0) + a_{23}(z_p - z_0)}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} - v \quad (8)$$

各未知係数の近似値を $x_{00}, y_{00}, z_{00}, \omega_0, \varphi_0, \kappa_0$ とし、各補正量を $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \omega, \Delta \varphi, \Delta \kappa$ とすると、未知係数は、以下の式で表すことが出来る．

$$x_0 = x_{00} - \Delta x_0 \quad (9)$$

$$y_0 = y_{00} - \Delta y_0 \quad (10)$$

$$z_0 = z_{00} - \Delta z_0 \quad (11)$$

$$\omega = \omega_0 - \Delta \omega \quad (12)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \Delta \varphi \quad (13)$$

$$\kappa = \kappa_0 - \Delta \kappa \quad (14)$$

関数 F_u, F_v において、近似値の周りにテイラー展開する．つまりテイラー級数（式 6）において、 $x = x_0, a = x_{00}$ とおく．すると、 $x_0 - x_{00} = -\Delta x_0$ となる．他の変数 $y_0, z_0, \omega, \varphi, \kappa$ についても同様に考え、多変数の関数なので偏微分を用いると以下の式が得られる．なお、級数における二階導関数の項以降は無視できるものとしている．

$$F_u(x_0, \omega, \varphi, \kappa) \approx F_u(x_{00}, y_{00}, z_{00}, \omega_0, \varphi_0, \kappa_0) - \frac{\partial F_u}{\partial x_0} \Delta x_0 - \frac{\partial F_u}{\partial y_0} \Delta y_0 - \frac{\partial F_u}{\partial z_0} \Delta z_0 - \frac{\partial F_u}{\partial \omega} \Delta \omega - \frac{\partial F_u}{\partial \varphi} \Delta \varphi - \frac{\partial F_u}{\partial \kappa} \Delta \kappa \quad (15)$$

$$F_v(y_0, \omega, \varphi, \kappa) \approx F_v(x_{00}, y_{00}, z_{00}, \omega_0, \varphi_0, \kappa_0) - \frac{\partial F_v}{\partial x_0} \Delta x_0 - \frac{\partial F_v}{\partial y_0} \Delta y_0 - \frac{\partial F_v}{\partial z_0} \Delta z_0 - \frac{\partial F_v}{\partial \omega} \Delta \omega - \frac{\partial F_v}{\partial \varphi} \Delta \varphi - \frac{\partial F_v}{\partial \kappa} \Delta \kappa \quad (16)$$

テイラー展開による微係数は，以下のように計算される．

$$\frac{\partial F_u}{\partial x_0} = \frac{ca_{11} + ua_{31}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (17)$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial y_0} = \frac{ca_{12} + ua_{32}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (18)$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial z_0} = \frac{ca_{13} + ua_{33}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (19)$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial \omega} = \frac{uv}{c} \quad (20)$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial \varphi} = -\frac{u^2}{c} \cos \omega - u \sin \omega - c \cos \omega \quad (21)$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial \kappa} = \frac{\partial F_u}{\partial x_0}(y_p - y_0) - \frac{\partial F_u}{\partial y_0}(x_p - x_0) \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial x_0} = \frac{ca_{21} + va_{31}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial y_0} = \frac{ca_{22} + va_{32}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (24)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial z_0} = \frac{ca_{23} + va_{33}}{a_{31}(x_p - x_0) + a_{32}(y_p - y_0) + a_{33}(z_p - z_0)} \quad (25)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial \omega} = c + \frac{v^2}{c} \quad (26)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial \varphi} = u \sin \omega - \frac{uv}{c} \cos \omega \quad (27)$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial \kappa} = \frac{\partial F_v}{\partial x_0}(y_p - y_0) - \frac{\partial F_v}{\partial y_0}(x_p - x_0) \quad (28)$$

$$(29)$$

$x_{00}, y_{00}, z_{00}, \omega_0, \varphi_0, \kappa_0$ の初期値と基準点データを式 15，式 16 に代入し，最小二乗法を適用すれば，補正量 $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \omega, \Delta \varphi, \Delta \kappa$ が求まる．