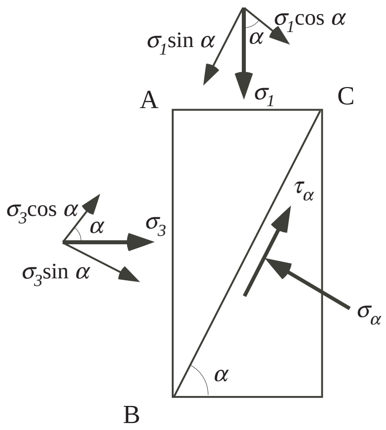
モールの応力円

図のように．微小部分に鉛直方向に σ_1，水平方向に σ_3 の応力がかかっている場合において，角度 α の傾きを持つ面に対しての応力 σ と剪断力 τ を考える．



まず，σ_1 と σ_3 は，角度 α の傾きを持つ面に垂直な成分と沿った成分とに分けられる．

面に垂直な成分は，$\sigma_1 \cos\alpha$ と $\sigma_3 \sin\alpha$

面に沿った成分は，$\sigma_1 \sin\alpha$ と $\sigma_3 \cos\alpha$

これらの応力が面に働くわけだが，面の長さが斜めになった分応力はさらに小さくなる．つまり，

σ_1 に関しては $\dfrac{AC}{BC} = \cos\alpha$

σ_3 は関しては $\dfrac{AB}{BC} = \sin\alpha$ だけさらに小さくなる．

したがって，面に垂直な成分と釣り合う応力 σ_α と面に沿った成分と釣り合う剪断力 τ_α は，

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_3 \sin\alpha \cdot \sin\alpha \tag{1}$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_3 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \tag{2}$$

これを整理すると，

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha \tag{3}$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_3 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

ここで，三角比における倍角公式を適用する．

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ より

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + \sigma_3 \frac{-\cos 2\alpha + 1}{2} \tag{5}$$

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \frac{\sin 2\alpha}{2} - \sigma_3 \frac{\sin 2\alpha}{2} \tag{6}$$

これを整理すると，

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha \tag{7}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha \tag{8}$$

この式は，中心の x 軸座標が $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ で，半径 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ の円上の座標で応力 σ_α と剪断力 τ_α の大きさを表すことが出来る．この画期的な円をモールの応力円と呼び，模式化すると以下の図のようになる．