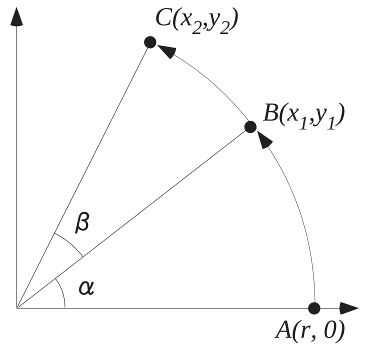
極座標と直交座標

1　加法定理

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b \tag{1}$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b \tag{2}$$

2　回転行列

2.1　二次元回転行列



上図のように，$A(r, 0)$ が，α だけ回転した時の座標 $B(x_1, y_1)$ を α と r で表す．

$$x_1 = r\cos\alpha \tag{3}$$
$$y_1 = r\sin\alpha \tag{4}$$

$B(x_1, y_1)$ が，β だけ回転した時の座標 $C(x_2, y_2)$ を α, β, r で表し，加法定理を適用した後，x_1, y_1 で整理する．

$$x_2 = r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cdot\cos\beta - r\sin\alpha\cdot\sin\beta = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta \tag{5}$$
$$y_2 = r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cdot\cos\beta + r\cos\alpha\cdot\sin\beta = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta \tag{6}$$

すると，$B(x_1, y_1)$ から $C(x_2, y_2)$ への回転を表す変換を行列で表すことができる．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

2.2　三次元回転行列を用いる

先に導いた二次元の回転行列を三次元に拡張すると，次式を得る．
X 軸回りの回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{8}$$

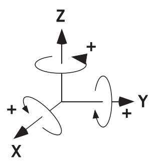
Y 軸回りの回転

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{9}$$

Z 軸回りの回転

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10}$$

なお，三次元座標における回転行列において，回転角度の正方向は下図の通りで，右ねじの方向が正となる．



3　三次元直交座標で位置を表す

3.1　三次元直交座標系の利点

経緯度座標系は，地球上の位置を表現するのには向いているが，人工衛星などの宇宙空間での位置を表すのには向いていない．宇宙空間における見かけの位置は赤道座標系（赤緯赤経）で表すこともできるが，あくまでもそれは天球上に投影された見かけ上の位置である．特に動く天体の位置を推算する時は，XYZ の直交座標系で表した方が便利である．

3.2　地球を中心とする三次元直交座標系（地心直交座標系）

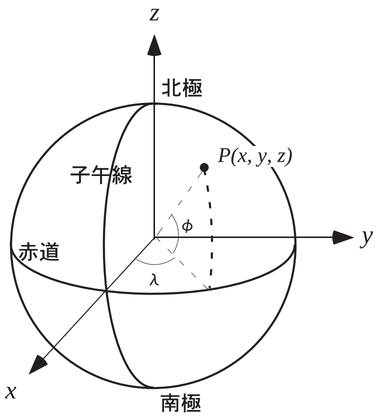
人工衛星などの地球を中心にまわる天体を表すのに用いる．惑星など，太陽系天体の位置を表すには，太陽と中心とする直交座標系（日心直交座標系）を用いる．各軸の方向は，次の通り．

X 軸：東経 0 ° の方向

Y 軸：東経 90 ° の方向

Z 軸：北極の方向

単位は m 等の長さの単位を用いる



4　三次元直交座標と緯経度の変換

4.1　直交座標から経度への変換

XY 平面を考える．

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{11}$$

4.2　直交座標から緯度への変換

XY 平面に投影された P と原点との距離は，$\sqrt{x^2 + y^2}$ である．
次に点 P を通る子午面を考え，

$$\phi = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{12}$$

4.3　緯経度から直交座標への変換

まず，基準となる点を設定し，P に到達するようにその点を回転させることによって計算する．
基準となる点を，グリニッジ子午線と赤道とが交差する点におくと，この点は地球の半径を r とすれば，XYZ の直交座標で表すと $(r, 0, 0)$ となる．この基準となる点を Y 軸まわりに ϕ 回転させ，次に Z 軸まわりに λ 回転させれば，P に到達する．なお，回転の順序と回転角の符号には注意しなければならない．Z 軸回りに先に回転させると，次に回転させるべき軸は X 軸でも Y 軸でもない状態となる．行列のかけ算において，交換の法則が成り立たない所以でもある．回転角の符号は，右手系は右回りが正となるので，P が北半球にある場合，Y 軸まわりに $-\phi$ 回転させることになる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$