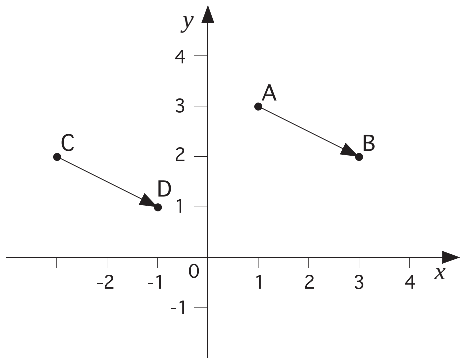
ベクトルと行列

1 ベクトル (Vector)

ベクトル (Vector) は，19 世紀にイギリスのハミルトンによって**スカラー** (Scalar) と共に確立された概念である．ある座標系において，向きと大きさを持つものである．したがってベクトルは，運動するものに適用することが多いが，位置関係をベクトルで表現したり，様々な特徴量をベクトルを用いて表現したりすることができ，非常に便利なものである．

点 $\mathrm{A}(x_a, y_a)$ と点 $\mathrm{B}(x_b, y_b)$ があり，点 A から B へ向かうベクトルは，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と表す，これを成分で表現すると，$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ と表される．



なおベクトルは，座標の出発点が違えども同じ向きで同じ大きさのものは等しいということになる，例えば，上図においては $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ となる．したがってベクトルを表現するのに点同士をつなげる意味の $\overrightarrow{AB}$ よりもこれを一つのベクトルとしてある文字で表現した方が簡単で分かりやすい．たとえば $\overrightarrow{AB}$ を a を使って表現する場合，$\vec{a}$ と表現したり，単に太字の英字（小文字）で $\boldsymbol{a}$ と表現したりする．ここでは，ベクトルを英字（小文字）の太字で表現することとする．また，高校までの数学では，ベクトルの成分は横方向に表現していたが，一般には縦方向で表す．つまり，以下のように表現する．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} \tag{1}$$

後に続く，行列とベクトルの演算や連立方程式の表現に便利だからである．なお，三次元以上のベクトルについては，単に成分を増やすだけで表現できる． m 次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ を成分 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ で表現すると，以下のようになる．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

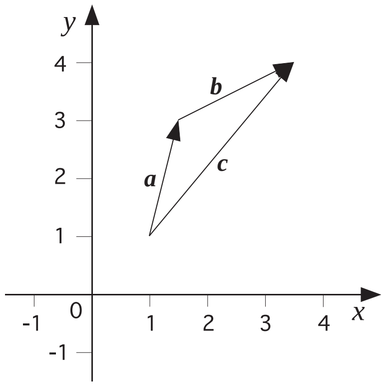
1.1　ベクトルの定数倍

二次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ があり，これに定数 k をかける場合，次式のように単に各成分に k をかけるだけでよい．m 次元のベクトルについても同様である．定数倍することによって，ベクトルの長さや向きを反転させることが出来る．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}, \qquad k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} kx_a \\ ky_a \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.2　ベクトルの足し算

下図のように，二次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があり，ベクトル同士を足し算することが出来る．つまり，$\boldsymbol{a}$ の終点に $\boldsymbol{b}$ の始点をおき，$\boldsymbol{a}$ 始点から $\boldsymbol{b}$ の終点を結ぶベクトル $\boldsymbol{c}$ が足し算の結果となる．



ベクトルの足し算を計算するには，単に成分同士を足し算すればよく，次式で表すことが出来る．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} \tag{4}$$

多次元のベクトル同士の足し算も同様である．ベクトル同士のかけ算については，内積や外積があり，少々複雑でなので後述する．

1.3　ベクトルの大きさ

ベクトルは，向きと大きさを持つものであるが，大きさは，ベクトルの成分を用いてピタゴラスの定理により計算できる．例えばベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさは，絶対値記号を用いて $|\boldsymbol{a}|$ で表し，次式で計算できる．

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} \tag{5}$$

三次元以上のベクトルについても同様に，各成分の二乗和を平方根すれば算出できる．m 次元のベクトル $\boldsymbol{a}$ において，成分 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ のとき，その大きさは以下のようになる．

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2} \tag{6}$$

なお，特に大きさが 1 のベクトルは，**単位ベクトル**と呼ばれている．

2　行列 (Matrix)

行列は，ベクトルを拡張したものといえる．具体的にはベクトルが横方向にも配置され，括弧でくくられたものである．これを一つの文字で表すときには，英字（大文字）の太字で $\boldsymbol{A}$ と表したり $\tilde{A}$ と表したりする．ここでは，英字（大文字）の太字 $\boldsymbol{A}$ と表す．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

横方向を行 (column)，縦方向を列 (row) と呼んでいる．そして行列の中の各値 a_{ij} を要素と呼んでいる．なお，i, j は，第 i 行目，第 j 列目を意味している．横方向の

$$\begin{aligned} &(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ &(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned} \tag{8}$$

は，行ベクトルと呼ばれ，縦方向の

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

は，列ベクトルと呼ばれている．

ところで，行と列の数が一致する行列は，特に**正方行列**と呼ばれている．

2.1　行列の定数倍

行列 $\boldsymbol{A}$ があり，これに定数 k をかける場合，次式のように単に要素に k をかけるだけでよい．いかなる大きさの行列についても同様である．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad k\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \tag{10}$$

2.2　行列の足し算

行列の足し算は，行と列の数が一致するもの同士であれば，各要素を足し算するだけの単純なものである．例えば，2×2 の行列同士の足し算は，以下のように計算できる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \tag{11}$$

2.3 行列のかけ算

行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のかけ算は，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルと $\boldsymbol{B}$ の列ベクトルの積和で表現される．したがって，$\boldsymbol{A}$ における行ベクトルの要素数と $\boldsymbol{B}$ における列ベクトルの要素数が同じでなければ計算できない．以下に 3×3 行列同士のかけ算の例を示す．

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \tag{12}
$$

式で表現すると解りにくいが，行ベクトルと列ベクトルにおける各成分の積を足し算している．つまり第 i 行，第 j 列の要素は，第 i 行目の行ベクトルと第 j 列目の列ベクトルの成分同士をかけ算し，足し合わせたものである．これは，後述するベクトルの内積と同じ意味を持つ．

$m \times n$ の $\boldsymbol{A}$ と $n \times k$ の $\boldsymbol{B}$ のかけ算において，計算結果は，$m \times k$ となる．そして第 i 行，第 j 列の要素 c_{ij} の計算を式で表すと以下のようになる．

$$
c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \tag{13}
$$

なお，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ なので注意しなければならない．順序を逆にしてかけ算する際には，$m = p$ でなければできないし，$m = p$ であったとしても計算結果は異なり，交換則は成り立たない．上の式を見て想像しても分かる通り，交換することで別の部分のかけ算をしてしまうからである．

2.4 単位行列

対角行列の要素が 1 で，その他が 0 の行列を**単位行列 $\boldsymbol{E}$** という．

$$
\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{14}
$$

ある行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，この単位行列 $\boldsymbol{E}$ をかけても，行列の要素は変わらないという特徴を持つ．単位行列においては，交換の法則が成り立つ．

2×2 のある行列 $\boldsymbol{A}$ に対して単位行列 $\boldsymbol{E}$ をかけあわせる例を以下に示す．

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{15}
$$

2.5 転置行列

ある行列において，行と列の要素をそっくり入れ替えたものを**転置行列**という．$\boldsymbol{A}$ の転置行列は，$\boldsymbol{A}^T$ と表現する．

$$\text{例えば，}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\text{の転置行列は，}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\text{となる} \tag{16}$$

2.6 逆行列

逆行列は，ある行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，特別な行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ をかけると単位行列 $\boldsymbol{E}$ になるものがある．この特別な行列を逆行列と呼んでいる．つまり $\boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{E}$ となる．2×2 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $\boldsymbol{X}$ とすると，以下のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

そこで，この行列を展開し，以下の四つの連立方程式をつくる．

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} = 1 \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} = 0 \\ a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22} = 0 \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases} \tag{18}$$

この連立方程式を $x_{11}, \cdots, x_{22}$ について解くと，以下の式を得る．

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{19}$$

したがって，2×2 の $\boldsymbol{A}$ の逆行列は，以下の式で計算できる．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{20}$$

実際に逆行列をかけて単位行列になるか確かめると，以下のようになる．

$$\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

3×3 行列以上の逆行列は，このように単純な公式とはならないが，基本的には方程式の解を解くことと同じことなので，Gauss の消去法等を用いてコンピュータプログラムによって簡単に計算することができる．