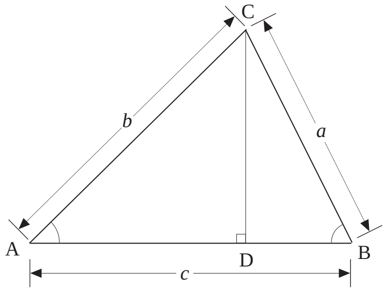
前方交会法 (Forward Intersection)

1　正弦定理

直角三角形以外の三角形でも辺の長さと角度の関係が解ると，応用範囲が広がる．特に測量においては，直角三角形を作ること自体が困難なので，一般的な三角形において成り立つ定理が必要とされる．**正弦定理** (sine formula) は，その一つである．下図のように三角形 ABC において，各頂点の内角を A, B, C，各辺の長さを a, b, c とする．



三角比は直角三角形においてのみ成り立つので，頂点 C より底辺 AB に向けて垂線をおろし，二つの直角三角形を作る．頂点 C からの垂線と底辺との交点を D とすると，$\angle A$ と $\angle B$ の正弦は，以下のようになる．

$$\sin A = \frac{CD}{b}, \qquad \sin B = \frac{CD}{a} \tag{1}$$

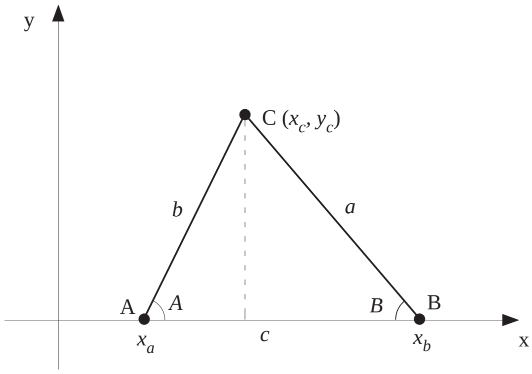
したがって，$b \sin A = a \sin B = CD$ となり，$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ が成り立つ．また，頂点 A から BC に向けて垂線を伸ばし，同様に $\angle B$ と $\angle C$ の正弦について解くと，$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ が成り立つ．したがって，最終的には，以下の式が成り立つ．これが正弦定理である．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{2}$$

この正弦定理を利用すれば，３つの角度が解っていれば，一つの辺が求まった時点で，他の二辺の長さを計算できる．

2　前方交会による座標計算

前方交会法は，対象物の座標を求めるのに，二箇所以上の場所から対象物への方向角を測ることによる方法である．観測者の前方で測線を交差させ，その交点が求める座標であることから前方交会と呼ばれている．



上図において，対象物 C の座標を求めることを考える．基準点 A, B は x 軸上の点で，AB 間の距離 c は精密に測られているもので，誤差は無視できるものとする．対象物 C の座標は，∠ A と∠ B を測って正弦定理により座標を計算する．正弦定理は，以下のとおりである．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{3}$$

ここで，∠ C は $\pi - A - B$ より，$\sin C$ の値は加法定理を用いて以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(\pi - (A + B)) \\ &= \sin(A + B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned} \tag{4}$$

C の座標を計算するには，b の長さを求める必要があり，b は以下の式で計算できる．

$$b = \frac{c \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} \tag{5}$$

したがって，C の座標は次のようになる．

$$x_c = b \cos A + x_a = \frac{c \cos A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} + x_a \tag{6}$$

$$y_c = b \sin A = \frac{c \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} \tag{7}$$

3　前方交会による測量の精度

計算された x_c と y_c に含まれる誤差 σ_{xc} と σ_{yc} は，∠ A と∠ B の精度がそれぞれ σ_a, σ_b とすると，誤差伝搬の法則により以下の式で計算できる．

$$\sigma_{xc}^2 = \left(\frac{\partial x_c}{\partial A}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial B}\right)^2 \sigma_b^2 \tag{8}$$

$$\sigma_{yc}^2 = \left(\frac{\partial y_c}{\partial A}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y_c}{\partial B}\right)^2 \sigma_b^2 \tag{9}$$

次に各偏微分係数を求めて行くが，このとき x_c, y_c ともに三角関数と分数関数が含まれている．そこで，これらの微分法を確認しておく．

$$\mathrm{D}_\theta \sin\theta = \cos\theta \tag{10}$$

$$\mathrm{D}_\theta \cos\theta = -\sin\theta \tag{11}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{12}$$

したがって，各偏微分係数は，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_c}{\partial A} &= \frac{-c\sin A\sin B(\sin A\cos B + \cos A\sin B) - c\cos A\sin B(\cos A\cos B - \sin A\sin B)}{(\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2} \\ &= \frac{-c\sin A\sin B\sin(A+B) - c\cos A\sin B\cos(A+B)}{\sin^2(A+B)}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_c}{\partial B} &= \frac{c\cos A\cos B(\sin A\cos B + \cos A\sin B) - c\cos A\sin B(-\sin A\sin B + \cos A\cos B)}{(\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2} \\ &= \frac{c\cos A\cos B\sin(A+B) - c\cos A\sin B\cos(A+B)}{\sin^2(A+B)}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_c}{\partial A} &= \frac{c\cos A\sin B(\sin A\cos B + \cos A\sin B) - c\sin A\sin B(\cos A\cos B - \sin A\sin B)}{(\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2} \\ &= \frac{c\cos A\sin B\sin(A+B) - c\sin A\sin B\cos(A+B)}{\sin^2(A+B)}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_c}{\partial B} &= \frac{c\sin A\cos B(\sin A\cos B + \cos A\sin B) - c\sin A\sin B(-\sin A\sin B + \cos A\cos B)}{(\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2} \\ &= \frac{c\sin A\cos B\sin(A+B) - c\sin A\sin B\cos(A+B)}{\sin^2(A+B)}\end{aligned} \tag{16}$$

これらの式に値を代入すれば，座標の精度が計算できる．