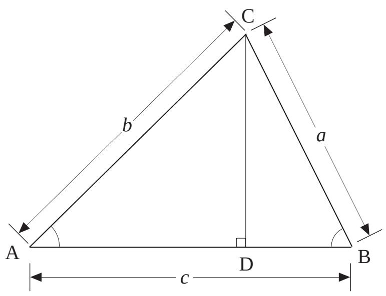
三辺測量 (Trilateration)

1　余弦定理

余弦定理 (cosine formula) は，余弦を使った一般の三角形に関する定理である．



正弦定理で用いた図をここでも利用して解説する．直角三角形 BCD において，ピタゴラスの定理より $a^2 = CD^2 + BD^2$ が成り立つ．ここで，$CD = b\sin A, BD = c - b\cos A$ より，次式を得る．

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned} \tag{1}$$

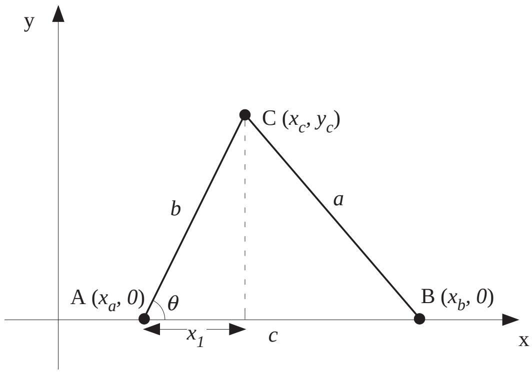
これが，余弦定理である．この定理は，二辺（b, c）とその間の角（$\angle A$）が決まれば，他の辺（a）の長さが求まることを意味する．また式を変形し，$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ とすれば，三辺の長さから角度が求まることを意味する．

なお，ここでは $a^2 =$ の式になっているが，他の辺についても同様に導くことが出来，以下の式が成り立つ．

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \tag{2}$$

2 三辺測量

三辺測量は，座標が既に求まっている２点を利用し，対象物と２つの既知点でできる三角形の辺の長さを測り，対象物の座標を求めるものである．例えば対象物 C の座標 (x_c, y_c) を求めることを考える．下図のように２つの既知点（基準点）を A, B とし，それぞれ x 軸上の点で，AB 間の座標は精密に測られているものとする．



AC 間の距離 b と BC 間の距離 a とを測れば，余弦定理により∠ CAB の余弦 $\cos\theta$ を以下の式で計算できる．なお，$c = x_b - x_a$ である．

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{3}$$

したがって，点 C の x 成分 x_c は，余弦を用いて次式で計算できる．

$$\begin{aligned} x_c &= x_a + x_1 \\ &= x_a + b\cos\theta \\ &= x_a + b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= x_a + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \end{aligned} \tag{4}$$

一方点 C の y 成分は，ピタゴラスの定理より次式で計算できる．

$$y_c = \sqrt{b^2 - x_1^2} \tag{5}$$

3　三辺測量の精度

ここで，三辺測量の精度を誤差伝搬の法則により求める．まず，$x_1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ に含まれる誤差 σ_{x1} を求める．距離の精度を，それぞれ $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ とすると．誤差伝搬の法則により次式を得る．

$$\begin{aligned}
\sigma_{x1}^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 \\
&= \left(-\frac{a}{c}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2c^2}\right)^2 \sigma_c^2 \qquad (6)
\end{aligned}$$

y_c に含まれる誤差 σ_{yc} は，同様に

$$\sigma_{yc}^2 = \left(\frac{\partial y_c}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y_c}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial y_c}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 \qquad (7)$$

偏微分の係数を順を追って計算する．まず $\frac{\partial y_c}{\partial a}$ を計算するが，$y_c =$ の式から計算すると，平方根が出て来て計算が煩雑になるので，y_c^2 を直接 a で偏微分する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (y_c^2)}{\partial a} &= -\frac{\partial (x_1^2)}{\partial a} \\
2y_c \frac{\partial y_c}{\partial a} &= -2x_1 \frac{\partial x_1}{\partial a} \\
y_c \frac{\partial y_c}{\partial a} &= -\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{-a}{c} \\
\frac{\partial y_c}{\partial a} &= \frac{a}{y_c}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2}\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

同様に $\frac{\partial y_c}{\partial b}$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (y_c^2)}{\partial b} &= 2b - \frac{\partial (x_1^2)}{\partial b} \\
2y_c \frac{\partial y_c}{\partial b} &= 2b - 2x_1 \frac{\partial x_1}{\partial b} \\
y_c \frac{\partial y_c}{\partial b} &= b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{b}{c} \\
\frac{\partial y_c}{\partial b} &= \frac{1}{y_c}\left(\frac{2c^2}{2c^2} \cdot b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c^2} \cdot b\right) \\
&= \frac{b}{y_c}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2c^2}\right) \qquad (9)
\end{aligned}$$

さらに $\frac{\partial y_c}{\partial c}$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y_c^2)}{\partial c} &= -\frac{\partial(x_1^2)}{\partial c} \\
2y_c\frac{\partial y_c}{\partial c} &= -2x_1\frac{\partial x_1}{\partial c} \\
y_c\frac{\partial y_c}{\partial c} &= -\frac{x_1}{y_c}\cdot\frac{c^2-b^2+a^2}{2c^2}
\end{aligned}$$

これにより，求まった偏微分の係数を用いて y_c の精度が計算できる．