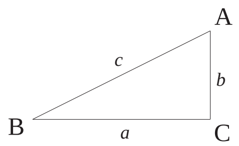
三角関数 (Trigonometric Function)

1　ピタゴラスの定理

直角三角形 (right triangle) は，測量の基本と言える．直角三角形でない三角形も存在するが，どんな三角形でも補助線を設けることで，二つの直角三角形に分割することが出来る．ここが重要なポイントである．直角三角形から三角比が定義され，正弦定理や余弦定理等，測量において多用される公式が導かれる．

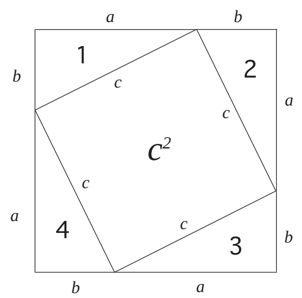
下図は，その直角三角形 ABC を表している．頂点 C が直角であり，辺 BC を**底辺** (base)，辺 AC を**高さ** (height)，辺 AB を**斜辺** (hypotenuse) と呼んでいる．

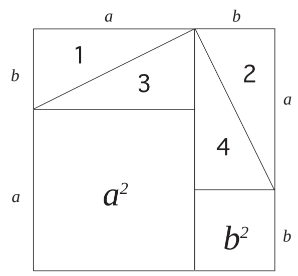


ピタゴラスの定理 (Pythagoras's theorem) は，直角三角形の辺の長さについての定理で，底辺の長さを a，高さを b，斜辺の長さを c とすると，次式で表される．

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

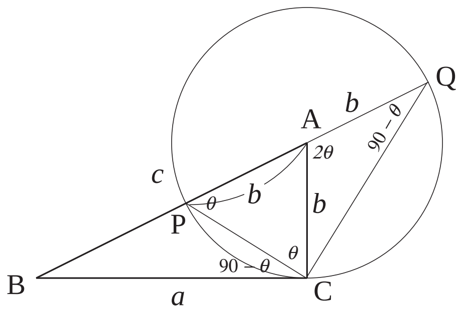
ここで，なぜピタゴラスの定理が成り立つのかを考える．各辺の二乗に関する式なので，各辺を一辺とする正方形の大きさに関する式といえる．そこでまず，下図の左のように斜辺から出来る正方形の周りに同じ三角形を 4 つ（1 番から 4 番）配置させる．すると，一辺が $a + b$ の正方形が描かれ，真ん中には斜辺から構成される面積 c^2 が表現されている．





次に，3 番の三角形をスライドさせて 1 番の斜辺とつなげ，4 番の三角形をスライドさせて 2 番の斜辺とつなげると，上図の右のようになる．すると，c^2 の空間が $a^2 + b^2$ の空間に変わる．外枠の大きさは $a + b$ で変化していないので，ピタゴラスの定理は証明される．この定理は，三角関数を始めとする様々なところで活用されるので覚えておくべきである．

このピタゴラスの定理を式を用いて導くには，三角形の相似を用る．下図のように点 A より半径が b の円を描くと，点 C で接する円が描ける．AB と円の交点を P，AB の延長線と円との交点を Q とする．



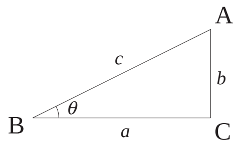
$\angle \mathrm{ACP} = \theta$ とすると，三角形 ACP は二等辺三角形なので，$\angle \mathrm{APC} = \theta$ となり，$\angle \mathrm{QAC} = 2\theta$ となる．三角形 ACQ も二等辺三角形なので，$\angle \mathrm{AQC} = \angle \mathrm{ACQ} = 90 - \theta$ となる．一方，$\angle \mathrm{ACB} = 90$ なので，$\angle \mathrm{PCB} = 90 - \theta$ となり，三角形 QBC と三角形 PBC は，相似三角形となる．したがって，$\mathrm{PB} : \mathrm{CB} = \mathrm{CB} : \mathrm{QB}$ が得られる．この各辺の長さを a, b, c で表すと，次式のようになり，整理すればピタゴラスの定理が導かれる．

$$\begin{aligned} (c-b) : a &= a : (c+b) \\ a^2 &= (c-b)(c+b) \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned} \tag{2}$$

ピタゴラスの定理は，紀元前 4 世紀ころに生まれているようで，ピタゴラスが発見したというより，ピタゴラスが証明し，一般的なものにしたと言われている．とにかく，この定理は測量においても重要であるし，三角関数を始めとする様々なところで活用される．身近なところで言えば，グランドに直角のラインを引くのに，巻き尺で 3m，4m，5m の辺からなる三角形をつくって直角を出すことは，一般にやられていることであろう．

2 三角比

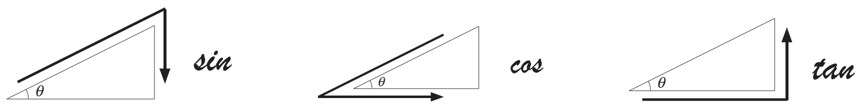
直角三角形は，前節で述べたようにピタゴラスの定理が成り立つ．さらに，一つの角度が直角なので，もう一つの角度が決まるだけで三角形の形が決まる．言い換えれば，直角三角形の直角でない一つの角度が決まれば，三角形の辺の長さの比も決まるのである．そこで，直角三角形の辺同士の長さの比と角度との関係を定義し，様々な計算の助けとしている．これが**三角比** (trigonometric ratio) であり，三角関数へと発展する．



上図において，斜辺と底辺とのなす角度を θ とすれば，次の３つの三角比が定義されている．

$$\sin\theta \equiv \frac{b}{c}, \qquad \cos\theta \equiv \frac{a}{c}, \qquad \tan\theta \equiv \frac{b}{a} \tag{3}$$

なお，$\equiv$ は，右辺を左辺と定義するという意味である．sin は，サインと読み，日本語では**正弦**と訳されている．cos は，コサインと読み，日本語では**余弦**と訳されている．tan は，タンジェントと読み，日本語では**正接**と訳されている．下図のように頭文字の筆記体の書き方と辺の分母分子を関連させれば，これら３つの三角比を覚えやすい．



３つの三角比は，お互いに関係を持っている．まず，次の式が成り立つ．

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{4}$$

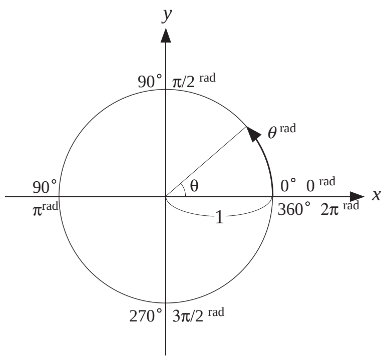
なぜなら右辺は，$\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$ となるからである．さらに，以下の式が成り立つ．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{5}$$

なぜなら左辺は，$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$ となる．そして，ピタゴラスの定理より，$a^2 + b^2 = c^2$ から $\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$ となる．

3　単位円と三角関数

角度は，0〜360° の**度数法** (degree) によって表現することが多い．これは古来，1 年が 360 日程度であると思われていたため，角度を表すのに一周が 360° とされていた．しかし，度数法は，数学的に意味を持っているわけではない．そこで，物理・数学においては**弧度法** (radian) が一般に用いられている．弧度法は，半径が 1 の円において，弧の長さによって角度を表す．単位はラジアン (rad) を用いる．

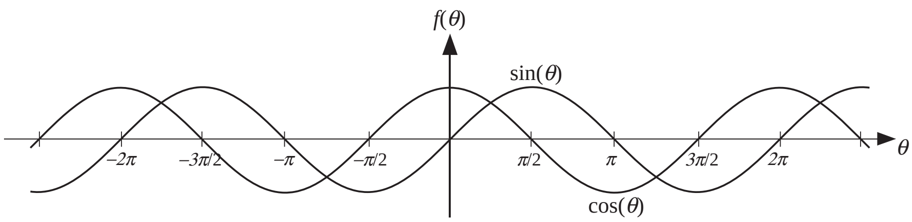


360° は，円周の長さに一致し，2π(rad) であり，180° は，半円の弧の長さなので π(rad) となる．度数法と弧度法との関係は，比例関係なので，度数で表された角度を弧度に変換するには，$\frac{\pi}{180}$ を掛け，弧度で表された角度を度数に変換するには，$\frac{180}{\pi}$ を掛ければ良い．ラジアンが便利なのは，半径 r の弧の長さを計算するのに $r \cdot \theta$ で計算できる点である．

半径が 1 の円は，特に**単位円** (unit circle) と呼ばれている．この円周上の点の座標 (x, y) は，角度 θ と三角比を用いれば以下の式で表すことが出来る．

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \tag{6}$$

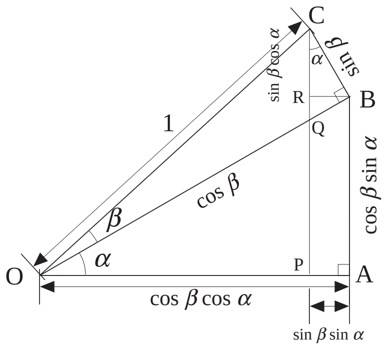
角度 θ における三角比の関数をグラフ化すると，下図のようになる．



$\cos\theta, \sin\theta$ ともに，振幅が 1 の周期性のある関数である．cos は縦軸に対して線対象のグラフで偶関数であり，sin は原点に対して点対称のグラフで奇関数である．cos と sin の関数は，グラフの形は同じであるが，横軸 θ が $\frac{\pi}{2}$ だけずれており，$\cos\theta + \frac{\pi}{2} = \sin\theta$ となっている．

4　加法定理

加法定理 (additional theorem) は，$\sin(\alpha+\beta)$ 及び $\sin(\alpha+\beta)$ に関する定理である．これを導くのに，下図のように二つの直角三角形を利用する．まず，直角三角形 OAB において，$\angle AOB=\alpha$ とする．この三角形の斜辺 OB の上に，OB を底辺とする直角三角形 OBC を描いた．ここで $\angle BOC=\beta$ とする．



$\sin(\alpha+\beta)$ は，C より OA に向けて垂線を描いたときの長さに相当する．ここで，この垂線と OA との交点を P，OB との交点を Q とする．さらに B から CP に向けて垂線を描き，その交点を R とする．する．三角形 OAB と三角形 OPQ は相似であり，続いて三角形 OPQ と三角形 BCQ も相似である．したがって，$\angle BCR=\alpha$ となる．

さて，OC の辺の長さを 1 とすると，求める $\sin(\alpha+\beta)$ は，CP の長さに等しい．したがって，$\sin(\alpha+\beta)=AB+CR$ といえる．ここで，OC の長さが 1 なので，BC の長さは $\sin\beta$ となり，CR の長さは，$\sin\beta\cos\alpha$ となる．また，OB の長さは $\cos\beta$ となり，AB は，$\cos\beta\sin\alpha$ となる．したがって，以下の式を導くことが出来る．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{7}$$

一方，$\cos(\alpha+\beta)$ は，OP の長さに等しい．したがって，$\cos(\alpha+\beta)=OA-PA$ といえる．ここで先と同様に，OB の長さが $\cos\beta$ なので OA の長さは，$\cos\beta\cos\alpha$ となり，BC の長さが $\sin\beta$ なので BR の長さは．$\sin\beta\sin\alpha$ となる．したがって，以下の式を導くことが出来る．

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$

加法だけでなく，減法についても導き，まとめると次式が得られる．

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{cases} \tag{9}$$