三角水準測量 (Trigonometric Leveling)

1　ユークリッド幾何学

測る時には，点が拠り所となる．数学的には**点** (point) は面積を持たないものと定義されているが，実際には円形や十字線の印によって代用している．そして距離を測る時は，点と点の間の直線間の距離を測る．複雑な形状を測る際には，多くの点を配置させて，それらの点の位置を測る．その後，点同士を**直線** (line) や**曲線** (curved line) でつなげて表現するのである．配置させる点数が多ければ多いほど詳細な形状を表現できる．

ところで，我々の住まいは，柱・壁・屋根等により構成されているため，小さい頃から身の回りの点・直線・平面を見て慣れ親しんでいる．ところが，自然界においては点・直線・平面は存在しない．かろうじてあるのは，太陽や月の形の円形である．したがって，点・直線・平面等は，我々の頭の中で生まれた抽象的な概念である．

数学の一つの分野である幾何学において，点・直線・平面等の概念は，ユークリッドが紀元前 3 世紀年頃に定義しており，５つの公理と公準をもとに幾何学の論理を展開している．それを**ユークリッド幾何学** (euclidean geometry) と呼んでいる．なお**定義** (definition) とは，物事を理解する上での約束事である．**公理** (axiom) とは，全ての研究における必要な仮定であり，**公準** (postulation) とは，特殊な研究における必要な仮定のこととされている．真実は解らないものという立場に立てば，物を定義し，何かを仮定しなければ，先に進まないのである．現在までに生まれた様々な定理や公式，そして理論は，何らかの仮定に基づいているので，その仮定が間違っていれば，全てが覆される．

さて，ユークリッド幾何学における定義の一部は，以下のとおりである．

1. 点とは，部分を持たないものである．
2. 線とは，幅を持たない長さである．
3. 線の端は点である．
4. 直線とは，その上に点が平等にのっている線である．
5. 面とは，長さと幅だけを持っているものである．
6. 面の端は．線である．
7. 平面とは，直線がその上に平等にのっている面である．
8. 平行線とは，同一平面上にあって，その両方の側へどれほど延長しても，何れの側でも交わることのない直線のことである．

他にも角度や円や三角形に関する定義がある．これらについては今後適宜解説する．

そして公理は，以下のとおりである．

1. 同一のものに等しいものは，また互いに等しい．
2. 等しいものに等しいものを加えれば，全体は等しい．
3. 等しいものから等しいものを引けば，残りは等しい．

4. 互いに一致するものは，互いに等しい．
5. 全体は部分より大きい．

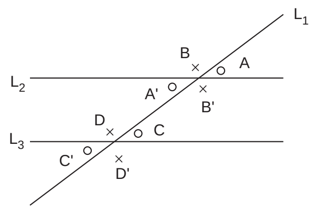
さらに公準は，以下のとおりである．

1. 任意の点から，他の任意の点へ，ただ一本の直線を引くことが出来る．
2. 一つの有限の直線は，これが直線になるように，その続きに延長することが出来る．
3. 任意の点を中心として，任意の長さを半径として円を描くことが出来る．
4. 直角は全てお互いに等しい．
5. 与えられた直線上にない，与えられた一点を通って，与えられた直線に平行な直線は，一本あって，一本に限る．（プレーフェイアによる）

ユークリッド幾何学は，平面上の点や直線について論理が展開されているが，地物を測量して結果を整理すると，地球は丸いために実際には地表面は平面ではないという問題が出てくる．さらに細かく見ると，重力によって空間が歪んでいるという問題もある．しかし，多くのユークリッド幾何学は，実用上は問題ないので，現在もその定義や公準に基づいた理論が応用されている．

2　角度

直線と直線が交差すると，**交点** (intersection) において 4 つの**角度** (angle) が出来る．下図は，それを示したもので，直線 L_1 と直線 L_2 によって，角度 A, B, A', B が存在している．このうち，A と A'，B と B' は，**対頂角** (opposite angle) の関係にあり，それぞれ角度が等しい．



直線 L_2 に平行な直線 L_3 も描いてある．**平行** (parallel) とは，ユークリッド幾何学においては，同一平面上にあって，その両方の側へどれほど延長しても，何れの側でも交わることのない直線と定義されている．したがって，直線 L_2 と直線 L_3 によってできる 4 つの角度は，直線 L_1 と直線 L_2 によって出来る角度と同じでなければならない．つまり，角度 A と角度 C は同じであれば，２つの直線は交わらない．角度 A と角度 C は，**同位角** (corresponding angle) の関係にあるという．角度 A と角度 A' が等しく角度 A と角度 C も等しいので，角度 A' と角度 C も同じとなる．角度 A' と角度 C は，**錯角** (alternate angle) の関係にあるという．これら，平行線を横切る直線が作る角度については，BC5 世紀頃，既にギリシャのターレスによって証明された三角形の合同条件より導くことができる．

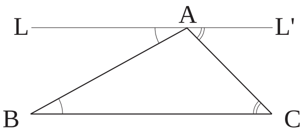
角度は，一般に 0〜360° の**度数法** (degree) で表現されている．これは古来，1 年が 360 日程度であると思われていたため，地球が太陽の周りを回る角度として 1 日 1° と定義されていたことによるらしい．なお，90° は，特に**直角** (perpendicular) と呼ばれており，地球の位置としては春分・夏至・

秋分・冬至にあたる．

3　三角形

面の形状を測る場合も，線と同様に多くの点を配置させ，多角形として形状を把握する場合が多い．この多角形は，**三角形** (triangle) を基本としている．例えば，四角形は２つの三角形が組合わさったものであり，五角形は３つの三角形が組合わさったものと考えれば良い．三角形は，後述するピタゴラスの定理，三角比，正弦・余弦定理，三角関数等，様々な計算が可能であることからも重要な形状である．

三角形の内角の和は 180°であるが，それは以下のように証明できる．下図は，三角形 ABC の点 A において線分 BC に平行な直線 LL' を描いている．



点 B の内角は，錯角の関係から∠ LAB と等しく，点 C の内角は，同様に∠ L'AC と等しい．したがって，三角形の各頂点の角を貼り合わせると一直線となり，三角形の内角の和は 180°といえる．

3.1　三角形の合同と相似

三本の棒の端同士をつなげれば三角形が出来る．つなげるときには，それぞれの棒の端をピンでとめ，関節のようにピンのまわりで自由に回転できるようにして三角形を作る．できた三角形に力を与えても，その形は変えようとはしない．これが四角形以上の多角形であれば，少しの力で形が自由に変わってしまう．したがって，構造的にも三角形は強い形といえる．さて，同じ長さの三本の棒を用いて，同様につなげると，先と全く同じ形で同じ大きさの三角形が出来る．このように２組の同じ大きさで同じ形の三角形は，**合同** (congruence) と呼ばれる．三角形の合同条件は，以下の３つである．

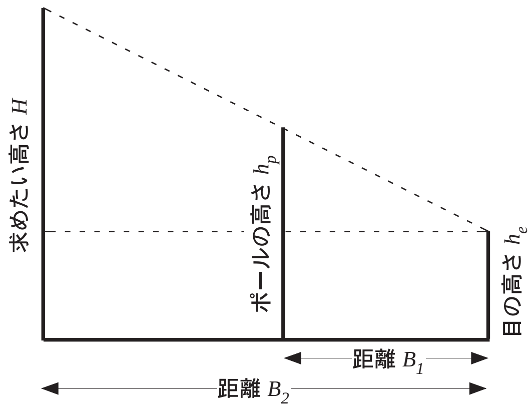
- 三辺の長さが等しい
- 二辺の長さとその間の角が等しい
- 一辺の長さとその両端の角が等しい

この合同条件については，BC5 世紀頃ギリシャのターレスが証明したと言われている．合同三角形を利用すれば，直接測ることが困難な二点間の距離を間接的に測ることが出来る．

大きさは異なっても同じ形の三角形もあるが，それを**相似** (similar) と呼ぶ．三角形の内角が全て等しい場合，相似三角形となる．相似三角形を用いても様々な距離が測れる．同じ大きさの三角形に限らないため，大きさの比さえ解れば，小さな三角形を用いて測ることが出来るため，有効な手法といえる．

4　ポールを用いた三角水準測量

ポールがあれば，歩測により，ある対象物の高さを求めることを考える．下図のようにポールの高さが h_p，目の高さが h_e，ポールまでの距離が B_1，対象物までの距離が B_2 とする



このとき，相似三角形より $B_1:(h_p-h_e)=B_2:(H-h_e)$ が成り立ち，対象物の高さ H は，次式で計算できる．

$$H=\frac{B_2}{B_1}(h_p-h_e)+h_e \tag{1}$$

この測量で重要なのは，ポールが垂直に立っていることと，目の高さと目の位置を正確に測ることである．

5　ポールを用いた三角水準測量の精度

それぞれの精度が $\sigma_{hp},\sigma_{he},\sigma_{b1},\sigma_{b2}$ で与えられたものとする．このとき H の精度 σ_H は，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\sigma_H^2&=\left(\frac{\partial H}{\partial h_p}\right)^2\sigma_{hp}^2+\left(\frac{\partial H}{\partial h_e}\right)^2\sigma_{he}^2+\left(\frac{\partial H}{\partial B_1}\right)^2\sigma_{b1}^2+\left(\frac{\partial H}{\partial B_2}\right)^2\sigma_{b2}^2\\&=\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2\sigma_{hp}^2+\left(1-\frac{B_2}{B_1}\right)^2\sigma_{he}^2+\left(-\frac{B_2(h_p-h_e)}{B_1^2}\right)^2\sigma_{b1}^2+\left(\frac{h_p-h_e}{B_1}\right)^2\sigma_{b2}^2\end{aligned} \tag{2}$$

距離 B_1,B_2 の精度は歩測の精度から求めることが出来る．高さ h_e,h_p の精度をどれだけ見込むかが重要である．