

誤差の伝搬 (Propagation of Error)

1 偏微分

高校までの数学では、関数として $f(x)$ を定義し、微分や積分を行い様々な問題を解いていた。関数において、変数は x で、たった一つであった。一方、二次元以上の関数等を取り扱う場合、多くの変数を用いて関数を定義しなければならない。例えば、変数が x, y と2つあり、これらの変数より z が求まる関数を考えてみる。関数を用いると $z = f(x, y)$ と表現できる。ここで、次式で関数が与えられている場合を考える。なお、 a, b, c は係数を表し、正の値とする。

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (1)$$

この関数において、 z の最小値を求める場合、微分して導関数が0となる x, y を計算するが、変数が2つあるので通常の微分ではなく、偏微分を行う。ある変数での偏微分は、その変数以外の変数は定数として取り扱う微分のやり方である。ここで、 z を変数 x によって偏微分を行う例を示す。微分では $\frac{dz}{dx}$ と、 d で微分を示したが、偏微分は ∂ を用い、 $\frac{\partial z}{\partial x}$ と表す。 ∂ は、ラウンド・ディーと読む。 x で偏微分するので、それ以外の y は定数と見なされる。したがって、次式を得る。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + by \quad (2)$$

y についても同様に偏微分すると、次式を得る。

$$\frac{\partial z}{\partial y} = bx + 2cy \quad (3)$$

繰り返すが、このように偏微分する変数以外を定数と見なし微分を行うことを偏微分と呼んでいる。

z の最小値を求めるには、偏微分により得られた偏導関数が0となる x, y を計算する。変数が2つで偏導関数も2つあるので、以下の連立方程式を解くことで求めることが出来る。

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx + 2cy = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2 誤差伝搬の法則

結果を得るのに、測量や計測を行うが、測量成果をそのまま使うことはまれで、測量成果を計算処理することによって結果を導くのが普通である。また測量自体には、計測器の精度や計測器のセッティングや視準において、様々な誤差が含まれている。したがって、たくさんの測量成果を用いる場合には、得られた結果がどの程度の精度を持っているか把握しておく必要がある。その計算に誤差伝搬の法則が適用される。

通常、精密な計測器には、精度が仕様として表示されている。この精度は、標準偏差で表される場合が多い。つまり、同じものを繰り返し計測した場合、同じ測定結果が得られることはなく、結果に

ばらつきが生じる。このばらつきは、標準偏差で表すことができる。ここで、計測値を x_i 、その標準偏差を精度と呼び、 σ_{x_i} で表す、計測値を用いた計算結果を y とすると、 y は関数 f を用いて次式で表すことができる。

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

そして計測値を用いた計算結果 y の精度 σ_y は、誤差伝搬の法則により次式で計算できる。多変数なので偏微分を利用している。

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2 \quad (6)$$

なお、この法則が成り立つのは、計測値 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が互いに独立な場合である。もし独立ではなく、何らかの相関関係がある場合は、共分散を考慮する必要がある。

3 歩測の精度

歩測によって距離を求める場合、直感的に距離が長いほど誤差が大きくなることが予測される。歩行における一步幅の長さとその標準偏差が求まっていれば、その結果に見込まれる精度は、誤差伝搬の法則によって予測することができる。ここで一步幅を x とし、歩数を a とすれば、距離 y は、 $y = ax$ により計算できる。このとき y の精度 σ_y は、一步幅の精度が σ_x だとすると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \sigma_x^2 \\ &= a^2 \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (7)$$

上式において、 y を求める変数が x の一つであるため、偏微分でなく通常の微分が適用される。したがって、以下の式を得る。

$$\sigma_y = a \sigma_x \quad (8)$$

直感通り、歩数が多くなるほど誤差が大きくなることがいえる。

4 面積の精度

長方形の面積を求める場合、二辺の長さを求めて面積を計算する。辺の長さに誤差が含まれていると、当然計算で求められた面積にもその誤差が影響する。その求められた面積の誤差を誤差伝搬の法則によって予測する。ここで二辺の長さを x_a, x_b とすれば、面積 y は、 $y = x_a x_b$ により計算できる。このとき y の精度 σ_y は、二辺の長さの精度がそれぞれ σ_a, σ_b だとすると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_b}\right)^2 \sigma_b^2 \\ &= x_b^2 \sigma_a^2 + x_a^2 \sigma_b^2\end{aligned}\tag{9}$$

したがって、以下の式を得る．

$$\sigma_y = \sqrt{x_b^2 \sigma_a^2 + x_a^2 \sigma_b^2}\tag{10}$$

求められた面積に含まれる誤差は、少々複雑に影響されていることが解る．

5 複数回測った平均値における誤差

誤差のある計測機器で測るとき、複数回測った平均値を利用すれば精度が上がると考えられる．何回計測すれば、どれだけ精度が向上するかを予測するのに、誤差伝搬の法則が適用できる．ここで、ある対象物を同じ計測機器で n 回測り、得られたデータは、 $(x_1, \dots, x_n)$ とする．各データに含まれる誤差は、同じ計測機器なので σ_x とする．このとき平均値 $\bar{x}$ は、以下の式で求めることができる．

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\tag{11}$$

次に、計算された $\bar{x}$ の精度を誤差伝搬の法則によって導く．

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_x^2 \\ &= \frac{1}{n} \sigma_x^2\end{aligned}\tag{12}$$

したがって、以下の式を得る．

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_x\tag{13}$$

つまり、精度は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 小さくなる．10 回、20 回と測れば、精度は良くなるが、100 回、1000 回と測ったところで、格段に精度が良くなるわけではないことを意味する．