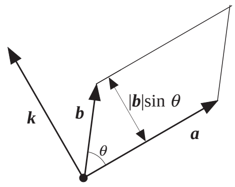
ベクトルの外積 (Outer Product)

1　外積

外積は，ベクトル積とも呼ばれている．ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ があり，それらのベクトルのなす角度が θ のとき，外積は次の式で定義される．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \boldsymbol{k} \tag{1}$$

なお，一般に外積の演算子は，内積と区別するため，$\times$ で表現している．



ここで，$\boldsymbol{k}$ は向きを示す**単位ベクトル**である．この向きは，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が作る面に垂直で，ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$ に向けるための回転の方向に対して，右ねじの指す向きを表している．つまり**法線ベクトル**である．そして外積の大きさは，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積を表している．

内積の時と同様に，外積をベクトルの成分を用いて解く方法を考えてみる．ベクトルの成分は，それぞれ $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とする（ここでは紙面の都合上，行ベクトルで表現している）．このとき x 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_x} = (1, 0, 0)$ と y 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_y} = (0, 1, 0)$，z 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_z} = (0, 0, 1)$ を組み込んでベクトルを表すと，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{e_x} + a_y\boldsymbol{e_y} + a_z\boldsymbol{e_z}) \times (b_x\boldsymbol{e_x} + b_y\boldsymbol{e_y} + b_z\boldsymbol{e_z}) \\
&= a_x\boldsymbol{e_x} \times b_x\boldsymbol{e_x} + a_x\boldsymbol{e_x} \times b_y\boldsymbol{e_y} + a_x\boldsymbol{e_x} \times b_z\boldsymbol{e_z} \\
&+ a_y\boldsymbol{e_y} \times b_x\boldsymbol{e_x} + a_y\boldsymbol{e_y} \times b_y\boldsymbol{e_y} + a_y\boldsymbol{e_y} \times b_z\boldsymbol{e_z} \\
&+ a_z\boldsymbol{e_z} \times b_x\boldsymbol{e_x} + a_z\boldsymbol{e_z} \times b_y\boldsymbol{e_y} + a_z\boldsymbol{e_z} \times b_z\boldsymbol{e_z}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\sin\theta$ の値から，直交する単位ベクトル同士の外積は 1，同じ単位ベクトル同士の外積は 0 となる．

$$\begin{cases}
\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{e_y} = \boldsymbol{e_z} \\
\boldsymbol{e_y} \times \boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{e_x} \\
\boldsymbol{e_z} \times \boldsymbol{e_x} = \boldsymbol{e_y} \\
\boldsymbol{e_y} \times \boldsymbol{e_x} = -\boldsymbol{e_z} \\
\boldsymbol{e_z} \times \boldsymbol{e_y} = -\boldsymbol{e_x} \\
\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{e_z} = -\boldsymbol{e_y} \\
\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{e_x} = \boldsymbol{e_y} \times \boldsymbol{e_y} = \boldsymbol{e_z} \times \boldsymbol{e_z} = 0
\end{cases} \tag{3}$$

したがって，これらを代入すれば，成分で表した外積の計算は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= a_x b_y \boldsymbol{e_z} - a_x b_z \boldsymbol{e_y} - a_y b_x \boldsymbol{e_z} + a_y b_z \boldsymbol{e_x} + a_z b_x \boldsymbol{e_y} - a_z b_y \boldsymbol{e_x} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e_x} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e_y} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e_z} \end{aligned} \tag{4}$$

この式を用いると，二つのベクトルで作られる面に垂直なベクトル（法線ベクトル）が，ベクトルの成分を用いて簡単に計算することができる．計算結果を成分で表すと，次式で表すことが出来る．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{5}$$

このベクトルの大きさが，２つのベクトルで作られる平行四辺形の面積に相当する．

ここで xy 平面におけるベクトルについて，この式を適用する．$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ とすると，外積は次式で求められる．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e_z} \tag{6}$$

したがって，２つのベクトルで作られる平行四辺形の面積は，$(a_x b_y - a_y b_x)$ により極めて簡単に計算できる．