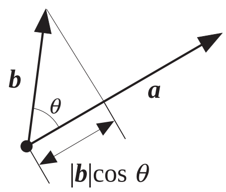
ベクトルの内積 (Inner Product)

1　内積

二つのベクトルのかけ算には，内積と外積の二種類ある．ここでは内積について解説する．内積は，スカラー積とも呼ばれている．ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ があり，それらのベクトルのなす角度が θ のとき，内積は次の式で定義される．

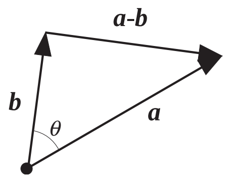
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \equiv |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1}$$

なお，一般に内積の演算子はピリオドで表現している．



上の図を使って内積の意味を考えると，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{b}$ の先から垂線を下ろした大きさ $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と $|\boldsymbol{a}|$ の積ということになる．これは，$\boldsymbol{b}$ に $\boldsymbol{a}$ の垂線をおろした場合でも同様である．したがって，ベクトルの内積は，交換法則も成り立つ．なお，ベクトルのなす角度 $\theta = 90^\circ$ のときは内積は 0 ということになり，角度 $\theta = 0^\circ$ のときは内積の値が最大となる．

ここで，なぜわざわざ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \equiv |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と定義すると便利なのかを考えてみる．下図は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から作られる三角形を描いている．この三角形において，角度 θ の対辺は，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ と表現できる．



そこで，余弦定理により $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ の長さを計算すると，以下のようになる．

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{2}$$

なお，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ は，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ とも表現できるので，式を展開すると，以下のようになる．

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{3}$$

したがって，これら２つの式を比較すれば，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ でなければならないことが判る．

さて，今度は内積をベクトルの成分を用いて解く方法を考えてみる．ベクトルの成分は，それぞれ $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とする（ここでは紙面の都合上，行ベクトルで表現している）．このとき x 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_x} = (1,0,0)$ と y 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_y} = (0,1,0)$，z 軸方向の向きを表す単位ベクトル $\boldsymbol{e_z} = (0,0,1)$ を組み込んでベクトルを表すと，$\boldsymbol{a}$

は以下のように表すことができる．

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e_x} + a_y \boldsymbol{e_y} + a_z \boldsymbol{e_z} \tag{4}$$

これをもとにベクトルの内積を成分を用いて計算すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{e_x} + a_y \boldsymbol{e_y} + a_z \boldsymbol{e_z}) \cdot (b_x \boldsymbol{e_x} + b_y \boldsymbol{e_y} + b_z \boldsymbol{e_z}) \\ &= a_x \boldsymbol{e_x} \cdot b_x \boldsymbol{e_x} + a_x \boldsymbol{e_x} \cdot b_y \boldsymbol{e_y} + a_x \boldsymbol{e_x} \cdot b_z \boldsymbol{e_z} \\ &+ a_y \boldsymbol{e_y} \cdot b_x \boldsymbol{e_x} + a_y \boldsymbol{e_y} \cdot b_y \boldsymbol{e_y} + a_y \boldsymbol{e_y} \cdot b_z \boldsymbol{e_z} \\ &+ a_z \boldsymbol{e_z} \cdot b_x \boldsymbol{e_x} + a_z \boldsymbol{e_z} \cdot b_y \boldsymbol{e_y} + a_z \boldsymbol{e_z} \cdot b_z \boldsymbol{e_z}\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\cos\theta$ の値から，直行する単位ベクトル同士の内積は 0，同じ単位ベクトル同士の内積は 1 となる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{e_x} \cdot \boldsymbol{e_y} = \boldsymbol{e_x} \cdot \boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{e_y} \cdot \boldsymbol{e_z} = 0 \\ \boldsymbol{e_x} \cdot \boldsymbol{e_x} = \boldsymbol{e_y} \cdot \boldsymbol{e_y} = \boldsymbol{e_z} \cdot \boldsymbol{e_z} = 1 \end{cases} \tag{6}$$

したがって，これらを代入すれば，成分で表した内積の計算は，次のようになる．

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{7}$$

ベクトルの内積を求めるのに，ベクトル同士のなす角度が分からなくてもベクトルの成分が分かっていれば，簡単に内積を計算することができる．

内積を用いれば，二つのベクトルの成分から角度を計算できることも意味し，測量ではこれを積極的に利用することができる．下の式は，ベクトルのなす角度を求めるものである．

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{8}$$

ところで，ベクトルの内積は，ベクトルの成分同士の積を足し合わせていることに他ならない．したがって，行列のかけ算によって次のように表現することが出来る．

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{9}$$

行列のかけ算において，各要素の値は，行ベクトルと列ベクトルの内積であることを意味する．