媒介変数で表す直線の式

1　行列とベクトルで表す方程式

前回，逆行列を解くことは，連立方程式を解くことであることを示したが，逆に行列を用いれば，方程式を簡単に表すことができる．例えば次の２元連立方程式があったとする．

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases} \tag{1}$$

これを行列で表すと，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

この方程式の解を求めるには，両辺について左から逆行列をかければよい．すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

つまり，逆行列を用いることで連立方程式を解くこともできるのである．

2　ベクトルを用いた直線の式

点 (x_0, y_0) を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a)$ に平行な直線の式は，媒介変数 t を用いると，以下のように表すことができる．

$$\begin{cases} x = x_a \cdot t + x_0 \\ y = y_a \cdot t + y_0 \end{cases} \tag{4}$$

媒介変数 t は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを単位とするパラメータと言える．

点 (x_0, y_0) と点 (x_1, y_1) を通る直線の式は，点 (x_0, y_0) を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ に平行な直線であるから，以下の式で表すことができる．

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \end{cases} \tag{5}$$

3　２直線の交点

点 (x_0, y_0) と点 (x_1, y_1) を通る直線と点 (x_2, y_2) と点 (x_3, y_3) を通る直線の交点の座標計算について考える．まず，点 (x_2, y_2) と点 (x_3, y_3) を通る直線の式は，次のようになる．

$$
\begin{cases}
x = (x_3 - x_2)s + x_2 \\
y = (y_3 - y_2)s + y_2
\end{cases}
\tag{6}
$$

ここで，媒介変数は s とおいた．方向を表すベクトルの大きさが等しい場合は，同じ媒介変数を利用することができるが，大きさが異なる場合は，同じ媒介変数を使えないからである．

交点を求めるために式 (18) と式 (19) について，x と y で整理すると以下の式となる．

$$
\begin{cases}
(x_1 - x_0)t + x_0 = (x_3 - x_2)s + x_2 \\
(y_1 - y_0)t + y_0 = (y_3 - y_2)s + y_2
\end{cases}
\tag{7}
$$

これを行列を用いて表す．

$$
\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}
\tag{8}
$$

逆行列を計算することで，t, s を求め，求まった t を直線の式に代入すれば，交点の座標が計算できる．

$$
\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}
=
\frac{1}{(x_1 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_0)}
\begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_0 - y_1 & x_1 - x_0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}
\tag{9}
$$

$$
t = \frac{(x_2 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_0)}
\tag{10}
$$

$$
\begin{cases}
x = (x_1 - x_0)\dfrac{(x_2 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_0)} + x_0 \\
\\
y = (y_1 - y_0)\dfrac{(x_2 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_0)} + y_0
\end{cases}
\tag{11}
$$