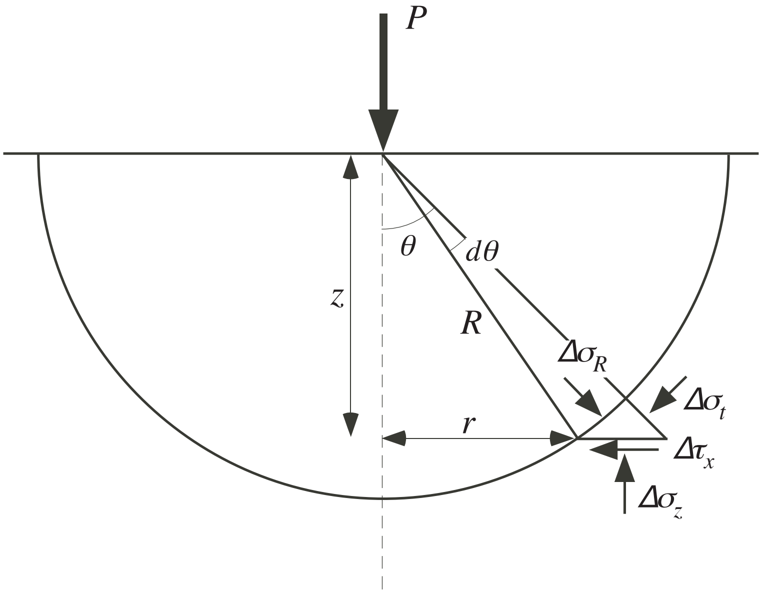
地盤内応力

まず，図のように．点荷重 P が地盤表面に載荷されており，半径 R の円弧上の点における応力を考える．



このとき，$\Delta\sigma_R$ は，まず斜め方向に載荷されるため $\cos\theta$ 分応力が減り，さらに半径 R^2 に比例して減少すると考えられる．そこで比例係数 k を導入し，$\Delta\sigma_R$ を式で表すと，以下のようになる．

$$\Delta\sigma_R = \frac{kP\cos\theta}{R^2} \tag{1}$$

次に，比例係数 k を力の釣り合いを考えることによって導く．
まず，円弧上において作用する $\Delta\sigma_R$ の z 成分 $\Delta\sigma_R\cos\theta$ を 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで微小面積で積分すると P と等しくなる．

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\sigma_R \cos\theta dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\sigma_R \cos\theta \cdot 2\pi r \cdot Rd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\sigma_R \cos\theta \cdot 2\pi R\sin\theta \cdot Rd\theta
\end{aligned} \tag{2}$$

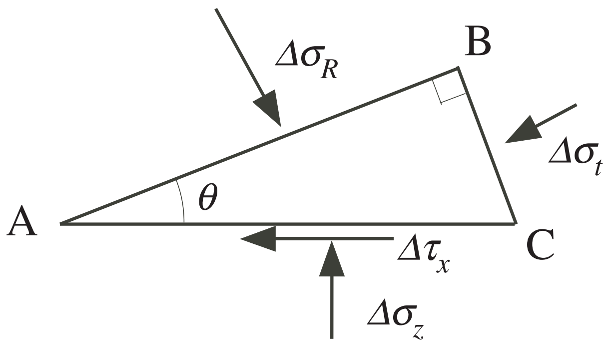
なお，dA は上から見た場合，半径 r の回りの微小面積なので，$dA = 2\pi rRd\theta$ となり，$r = R\sin\theta$ より，$dA = 2\pi R\sin\theta Rd\theta$ である．
この式に式 (1) の $\Delta\sigma_R$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{kP\cos\theta}{R^2}\cos\theta\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot R d\theta \\
&= 2\pi kP\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta \\
&= 2\pi kP\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\sin^3\theta)d\theta \\
&= 2\pi kP\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 3\theta)d\theta \\
&= 2\pi kP\left[-\cos\theta+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\pi kP}{3}
\end{aligned} \tag{3}
$$

したがって，$k=\dfrac{3}{2\pi}$ となり，

$$\Delta\sigma_R=\frac{3P}{2\pi}\frac{\cos\theta}{R^2} \tag{4}$$

一方下の図は，半径 R の円弧上の微小面積における応力を模式化したものである．$\Delta\sigma_R$ と $\Delta\sigma_z$ の関係を式で表す．



$\Delta\sigma_R$ の Z 軸成分の大きさ $\Delta\sigma_R\cos\theta$ は，さらに辺の長さの比に従って減少したものが，$\Delta\sigma_z$ となる．

$$\Delta\sigma_z=\frac{AB}{AC}\Delta\sigma_R\cos\theta \tag{5}$$

そして，$AB=AC\cos\theta$ なので，

$$\Delta\sigma_z=\Delta\sigma_R\cos^2\theta \tag{6}$$

$$\Delta\sigma_R=\frac{\Delta\sigma_z}{cos^2\theta} \tag{7}$$

これを先の式 (4) に代入すると

$$\frac{\Delta\sigma_z}{cos^2\theta} = \frac{3P}{2\pi}\frac{\cos\theta}{R^2} \tag{8}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P\cos^3\theta}{2\pi R^2} \tag{9}$$

ここで，$\cos\theta = \dfrac{z}{R}$ より $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\cos\theta}{z}$ なので

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P(\cos^3\theta)z^2}{2\pi R^2 z^2} = \frac{3P\cos^5\theta}{2\pi z^2} \tag{10}$$