

透水性

1 ベルヌーイの定理

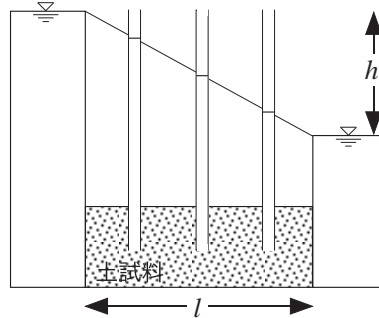
水の流れにおいてエネルギー保存則を適用したものが、ベルヌーイの定理である。

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{u}{g\gamma_w} = h \quad (1)$$

ここで、 v : 流速、 g : 重力加速度、 z : 位置水頭、 u : 水圧、 γ_w : 水の密度、 h : 全水頭 である。全水頭を表す h は、水頭ポテンシャルとも呼ばれ、これが一定の値を取るとされている。力学においてエネルギー保存則は、運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であるとされ、 $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{一定}$ という式で表されるが、質量 m をはらい、高さの単位で表すと $\frac{v^2}{2g} + z = \text{一定}$ となる。これに水圧の項が加わったものがベルヌーイの定理と考えればよい。土の中の水の流れは、流速 v が非常に小さいので速度の項を無視して $z + \frac{u}{g\gamma_w} = h$ とみなされる。

2 ダルシーの法則

下図は、長さ l の土試料を詰めたパイプに、水頭差が h の水圧をかけた状態を示している。



水頭差 h が大きくなれば、大きな水圧がかかる。この水頭差に対して、土試料の長さ l で割ると傾きが計算されるが、この傾きは動水勾配 i と呼ばれている。すなわち $i = \frac{h}{l}$ である。

ダルシーは、この動水勾配と土中を流れる水の速度の関係をダルシーの法則として、次の式で表した。

$$v = ki \quad (2)$$

k は、透水係数と呼ばれるもので、土によって異なる。例えば砂は間隙が大きいので速度が速くなるため透水係数も大きく、逆に粘土は間隙が小さいので速度が遅くなるため透水係数が極めて小さい。この透水係数の単位は、動水勾配 i が無次元のため、速度の単位で表される。

流速 v を表す式であるこの式を単位時間あたりの流量 Q で表す式に拡張すると、以下の式になる。

$$Q = vA = kiA \quad (3)$$

ここで、 A は断面積を表す。

3 ラプラスの方程式

水の流れにおいては、 $Q = vA = \text{一定}$ とされている。したがって、三次元での流量を考えた場合、 $\Delta Q = 0$ となる。つまり、 xyz のそれぞれの成分で考えると、以下の式となる。

$$\Delta Q = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z = 0 \quad (4)$$

(5)

ここで、 $\Delta Q_x = v_x \Delta y \Delta z$ より、 $\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta y \Delta z$ を代入して整理する。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

ダルシーの法則 $v = ki$ において、 xyz の全ての方向とも透水係数が一定であるとする、 $v_x = k \frac{\partial h}{\partial x}$ となり、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

この式をラプラスの方程式と呼び、一般化された連続の式である。