圧密

1　圧密方程式

ひずみ ϵ の時間変化と体積 v の変化についての偏微分方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1}$$

右辺を透水係数 k を用いて表す．動水勾配を i，水頭ポテンシャルを h とすると，

- $v = ki = k\left(-\frac{\partial h}{\partial z}\right)$
- なお，水頭ポテンシャル h は，$h = z + \frac{u_s}{\gamma_w} + \frac{u}{\gamma_w}$ （静水圧 u_s，間隙水圧 u，水の密度 γ_w）
- $z + \frac{u_s}{\gamma_w}$ は，一定なので，z で偏微分すると $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}$
- この式を代入すると，$v = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}$ となり，$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

左辺を体積圧縮係数 m_v を用いて表す．ひずみを ϵ，有効応力を σ' ととすると，

- $\epsilon = m_v \sigma'$
- ここで，荷重 p_0 は，有効応力 σ' と間隙水圧 u により次式で表すことが出来る．$p_0 = \sigma' + u$ より，$\sigma' = p_0 - u$ となり，p_0 が一定のときは，t で偏微分すると，$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$ なので，
- $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t}$

したがって，式 (1) の両辺は次の式となる．

$$-m_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{2}$$

これを整理すると，次の式となる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{m_v \gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{3}$$

C_v を圧密係数といい，これが，圧密基礎方程式である．

2　時間係数

圧密基礎方程式において，土の厚さ z と時間 t を無次元化する．つまり，比で表すと $Z = \dfrac{z}{z_0}$ また，$T_v = \dfrac{t}{t_0}$ となり，これを圧密方程式に代入する．

$$\frac{1}{t_0}\frac{\partial u}{\partial T_v} = C_v \frac{1}{{z_0}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \tag{4}$$

これを整理すると，次の式となる．

$$\frac{\partial u}{\partial T_v} = \frac{C_v t_0}{{z_0}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \tag{5}$$

無次元化したので，$\dfrac{C_v t_0}{{z_0}^2} = 1$ となり，$t_0 = \dfrac{{z_0}^2}{C_v}$

これを上の無次元化した $T_v =$ の式に代入すると，$T_v = \dfrac{C_v t}{{z_0}^2}$ となる．

初期における土の深さ z_0 を層厚 H とおくと，

$$T_v = \frac{C_v t}{H^2} \tag{6}$$

この式は，圧密を解く上で極めて重要な式なので，覚えておこう．なお，このときの H は，片側からしか排水されないときを想定しているので，両側から排水される場合は，層厚 H の 2 分の 1 の値を利用する．z と t を無次元化することによって解くべき微分方程式は，以下の熱伝導の形となる．

$$\frac{\partial u}{\partial T_v} = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \tag{7}$$

3　圧密度

最終圧密沈下量 S に対し，ある時点の圧密沈下量が S_t のとき，圧密度 U は次式となる．

$$U = \frac{S_t}{S} \tag{8}$$

圧密沈下量を求めるには，先のひずみと有効応力との関係 $\epsilon = m_v \sigma'$ より，

$$S_t = \int_0^H \epsilon dz = \int_0^H m_v \sigma' dz = \int_0^H (p_0 - u)\, dz \tag{9}$$

これを解くのに先の微分方程式を利用する．さらに S についても同様に解けば，圧密度と時間係数との関係が求まる．

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 T_v} \tag{10}$$