

1 電磁気学基礎

衛星リモートセンシングでは、様々な電磁波（光）の情報を利用する．そこで、その電磁波の基礎についてここで解説する．

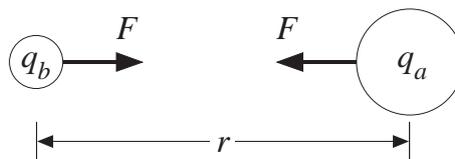
1.1 電界

電気については、18 世紀に入ってから様々な研究がなされ始めた．摩擦により静電気 (static electricity) が生まれる．その静電気は、モノを引き寄せろ力がある．プラスチック製の下敷きをナイロンのシャツ等で擦ると静電気が発生する．その下敷きを髪の毛に近づけると、髪の毛が下敷きにくっつくようになることは、よく知られている．これは、物質によって電気を溜めやすいものと溜めにくいものがあり、擦ることによって溜めやすい物質に電気が移動すると考えられていた．なぜ擦ることで電気が移動するかについては、20 世紀に入って、原子や分子の構造が把握できるようになり、その理由が明らかとなった．その原理については、著者自身も十分把握できていないので、他の文献に委ねたい．とにかく、電気が溜まる方をプラス、少なくなる方をマイナスと定義している．そして、電気の溜まったモノと、少ないモノは、互いに吸い寄せられる傾向にある．毛皮やナイロンはプラスになりやすく、アクリルやセルロイド、セロファンは、マイナスになりやすい．それゆえ、マイナスとなったプラスチック製の下敷きは、プラスの毛髪とくっつくような現象が発生する．

電気の量は、電荷 (electric charge) という用語で表現する．2 つの物体 A,B の電荷を q_a, q_b とし、物体間の距離が r のとき、2 つの物体に働く力 F は、次式で表すことができる．

$$F = k \frac{q_a q_b}{r^2} \quad (1)$$

ここで k は、係数を表している．下図は、その関係を図に表したものである．



この式は、ニュートンの万有引力の法則と全く同じ式である．式(1)と比べると、質量の部分に電荷に置き換わったにすぎない．この法則は、18 世紀後期にフランスのクーロン (Coulomb) が発見し、クーロンの法則と呼ばれている．クーロンは、物理学者であるだけでなく土木についても研究しており、特に土質力学においては、土の破壊基準について大きな成果を残している．

式 1 における力の単位は N (ニュートン) だが、それに対応する電荷の単位が必要となる．電荷の単位は C (クーロン) で定義されており、2 つの等しい電荷があり、距離 r が 1m のとき、 9×10^9 N の力が働くときの電荷を 1C と定義している．これより、係数 k は、 $9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ となる．

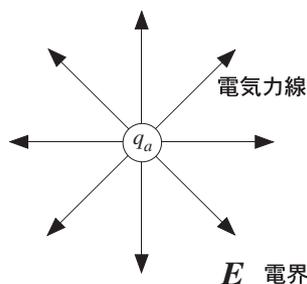
さて、電磁気学においては、式 1 における $k \frac{q_a q_b}{r^2}$ をまとめて、電界 (電場) (Electric Field) の強さ

E として表す．すると次式のように表すことができる．

$$F = q_b E \quad (2)$$

電界の強さ E は，電荷 q_a から距離 r 離れたところで， q_a の電荷によって q_b が，どれだけの影響を受けるかを表す指標となる．単位は， N/C である．例えば，ある電荷の値の解っている物体があったとき，作用する力を求めることが出来れば，電場の量が求まる．

下図は，電界の概念を表したものである．ある電荷 q_a があったとき，その電荷に近いほど大きい力を受ける．ここで，電荷から放射状に作用する電気力線 (electric flux line) の概念を取り入れる．電荷の強さの大小は，電荷から出る電気力線の数で表現する．電荷の強いものは，電気力線の数も多い．したがって，ある部分において，電気力線の密度が高い部分ほど強い電界と言える．



この電界の強さは，電荷からの距離 r の二乗に反比例するが，電荷を中心とする半径 r の球の面積に依存すると表現した方が的確である．電界の強さは，電気力線の密度と考えたが， r 離れた部分での電界の強さ E に球の表面積である $4\pi r^2$ を乗ざると一定となり，電気力線の数を示す指標となる．この指標を式で表すと，以下ようになる．

$$\begin{aligned} E \times 4\pi r^2 &= k \frac{q_a}{r^2} \times 4\pi r^2 \\ &= 4\pi k q_a \end{aligned} \quad (3)$$

この式の通り，電気力線の数を示す指標は， $4\pi k q_a$ で，定数となっている．この式は，電荷と電界の強さについての関係だけでなく，光源と光の強さの関係においても同様で，明るい光源を持つものも遠くでは弱い，光源を中心とする球の面積によって光の強さを積分すると一定となる．この法則は，1835年にガウスが発見し，ガウスの法則と呼ばれている．

ここで， $4\pi k$ は $\frac{1}{\epsilon_0}$ で表し， ϵ_0 は誘電率 (permittivity) と呼ばれている．この誘電率を使って先の式を書き換えると，電気力線の数を表す指標は， $\frac{q_a}{\epsilon_0}$ となる．したがって，電界の強さを式で表すと，次式となる．

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E &= \frac{q_a}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{q_a}{4\pi r^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (4)$$

この式において， $\frac{q_a}{4\pi r^2}$ は，電束密度 (electric flux density) D と呼び，次式で表すことができる．

$$D = \epsilon_0 E \quad (5)$$

磁束密度の単位は，誘電率 ϵ_0 の単位が C^2/Nm^2 ，電界の強さ E の単位が N/C なので， C/m^2 となる．

さて，電荷と力の関係がクーロンの法則だったが，つぎに力の行う仕事を導く．電荷 q_b がクーロン力によって q_a まで移動したとすると，仕事をしたことになる．仕事 W は，既に力学の基礎で述べたように，式(1)により $W = F \cdot r$ であった．電磁気でも同様に考えると，次式を得る．

$$\begin{aligned} W &= F \cdot r \\ &= q_b E r \\ &= q_b \frac{q_a}{4\pi r \epsilon_0} \end{aligned} \tag{6}$$

上式において， $E r$ の部分は，電位 (electric potential) と呼ばれている．逆に電位の勾配，つまり電位を距離で微分したものが電界の強さということになる．また，2点間の電位の差が電位差 (difference of potential) であり，電圧 (power voltage) V に対応する．

1.2 磁界

ニュートンの万有引力の法則の式は，2つの電荷の間のクーロン力だけでなく，磁石における2つの磁極の間に働く力においても成り立つ極めて重要な式である．磁石はご存知のように N 極と S 極に分かれ，お互いに引っ張り合う力を生じる．

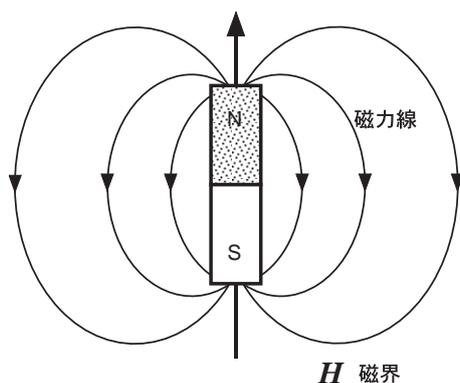
電気の量は，電荷という用語で表現したが，磁気において対応する量は，磁極の強さと呼んでいる．2つの物体 A, B の磁極の強さを p_n, p_s とし，物体間の距離が r のとき，2つの物体に働く力 F は，次式で表すことが出来る．

$$F = k \frac{p_n p_s}{r^2} \tag{7}$$

ここで k は，係数を表している．

電荷の単位は C (クーロン) で定義されていたが，磁極の強さは，Wb (ウェーバー) という単位で定義されている．2つの等しい磁極があり，距離 r が 1m のとき， $\frac{10^7}{(4\pi)^2} = 6.33 \times 10^4 N$ の力が働くときの電荷を 1Wb と定義している．これより，係数 k は， $6.33 \times 10^4 Nm^2/Wb^2$ となる．

電荷においては電界という概念を導入し，電荷の影響を表すことが出来た．同様に，磁極においては，磁界 (magnetic field) H という概念を導入して磁極の影響を表すことが出来る．下図は，その概念を表したものである．ある磁極 p_n, p_s があつたとき，その磁極に近いほど大きい力を受ける．ここで，磁極から放射状に作用する磁束線 (magnetic flux line) の概念を取り入れる．磁極の強さの大小は，磁極から出る磁束線の数で表現する．磁極の強いものは，磁束線の数も多い．したがって，ある部分において，磁束線の密度が高い部分ほど強い磁界と言える．



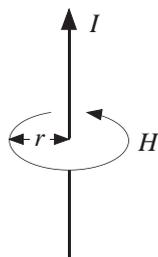
磁界においてもガウスの法則が成り立つ。

磁界は磁石により発生するだけでなく、電気によっても発生する。理科の実験等で、豆電球を導線を使って乾電池に繋いで光らせることはよくやられている。このとき、方位磁針をその導線に近づけると、方位磁針の針の向きが変化する。このことは、電気によって磁界が発生することを示しており、1820年にデンマークのエルステッド (Ørsted) が発見した。

その後、フランスのアンペール (Ampère) が詳しく実験をし、電流 I と磁界 H との関係を導いた。それが以下の式である。アンペールの法則と呼ばれている。

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (8)$$

電流 I については後述するが、電荷の流れを表すものであり、単位は A (アンペア) である。したがって磁界 H の単位は、A/m となる。この法則は、磁界の強さが電流に比例し、導線からの距離に反比例することを意味している。下図はその概念図である。磁力線の向きは、電流の方向に対して右回りで、一般的な木ねじの向きに等しい。



なお電流による磁界は、単に導線からの距離 r に反比例するというよりむしろ、導線を中心とする半径 r の円周の長さに反比例しているといえる。点電荷による電界は、ガウスの法則により球の表面積に反比例していた。導線により発生する磁界は、点ではなく、線なので円柱上で同じ磁界が発生する。導線が十分長ければ、この式の通り、電界は円周の長さに反比例することになる。一方、導線が短い場合は、点に近くなるため円の表面積に反比例する。微小な導線の長さを Δs とすると、電流による磁界は、次式で表すことができる。

$$H = \frac{I\Delta s}{4\pi r^2} \quad (9)$$

この式は、フランスのピオとサバールが発見したため、ピオ・サバールの法則と呼ばれている。

電気によって強い磁界を発生させるには、導線を筒状にグルグルと巻いてコイルをつくれれば良い。コイルによって磁束線の数を増やすことが出来るからである。さらにコイルの中に磁化しやすい金属の棒を挿入すれば、さらに磁力を大きくすることが出来る。これを利用すれば、強い磁石を電気で作れることになり、色々な活用がなされている。いわゆる電磁石である。

さて、電界 E においては誘電率 ϵ を用いて電束密度 D が定義されていた。磁界 H においては同様に透磁率 (magnetic permeability) μ_0 を用いて磁束密度 (magnetic flux density) B が定義されている。

$$B = \mu_0 H \quad (10)$$

磁束密度の単位は、電束密度の単位と同様に導くと、 Wb/m^2 となる。透磁率 μ_0 の単位は、誘電率と同様に N/A^2 であり、真空中では $4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ である。

1.3 電流

ここで、電流 (electrical current) について解説しておく。電流は、電荷の流れをさしている。厳密な定義は、単位時間にある断面を通過する電気量とされている。そして 1A (アンペア) とは、1秒間に 1C の電荷が流れる量を表している。電荷粒子の密度を ρ 、電荷粒子の平均速度を v 、断面積を S とすると、電流 I は次式で表すことが出来る。

$$I = \rho v S q \quad (11)$$

この式における電荷粒子の平均速度 v を他の式で置き換えてみる。電荷粒子の質量を m とし、加速度を α とすると、その力は $F = ma$ で表される。一方、式 2 より $F = qE$ なので、加速度は、 $\alpha = \frac{qE}{m}$ で表すことが出来る。そして速度 v は時間を T とすると $v = \frac{qE}{m} T$ となり、式 11 は、次式のように表すことが出来る。

$$\begin{aligned} I &= \rho \frac{qE}{m} S q \\ &= \frac{\rho q^2 S}{m} E \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、電位 E と電流 I は比例関係にあることが分かる。

電気回路においては、電流 I 、電圧 V 、抵抗 R の関係は、次式で表している。

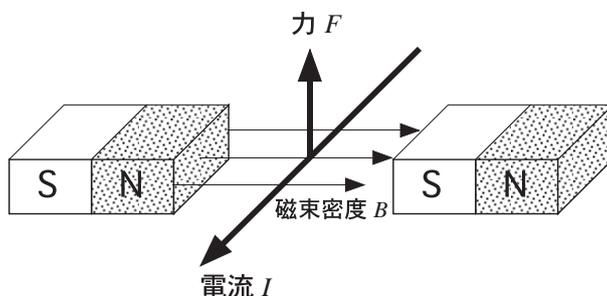
$$I = \frac{V}{R} \quad (13)$$

この式は、オームの法則と呼ばれている。これは、先に 12 における電位 E を電圧 V に置き換えて、比例係数を $\frac{1}{R}$ で表している。

1.4 電流と磁界の関係

1.4.1 ローレンツ力

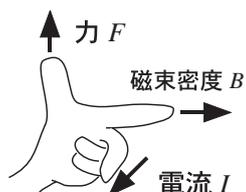
電流が流れると、磁界を発生させるが、磁界の中に電流を流すと力が発生する。この現象は、アンペールの力、或はローレンツ力と呼ばれている。磁束密度 B 、電流 I 、力 F の関係は、下図のようになっている。



それぞれ異なる方向を持っている。これらの関係をベクトルを用いて式で表すと、次式のように簡単に表すことができる。

$$F = (I \times B)l \quad (14)$$

ここで、 l は電流方向の長さであり、ベクトル積（外積）を用いて表している。力 F の方向は、電流 I と磁束密度 B とが作る平面に垂直な法線方向となっている。それぞれの方向の覚え方については、下図のようにフレミングの左手の法則で知られている。



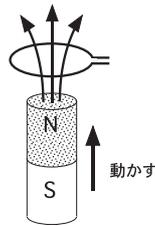
フレミングの左手の法則

親指を力、人差し指を磁界、中指を電流として、それぞれの方向を表している。

このローレンツ力は、モーターに利用されている。磁石の中でコイル状の導線をおき、電流を流すことでローレンツ力を回転する力に変えているのがモーターである。

1.4.2 電磁誘導

電流と磁界によって力が発生し、モーターが開発された。逆に磁界と力によって電流を発生させることも出来る。いわゆる発電機である。磁界と力というより、磁界の変化といった方が適切である。下図に示したように、コイルに磁石を近づけると電流が発生する。



これを発見したのはファラデー (Faraday) で、1831 年のことである。この現象を電磁誘導 (electromagnetic induction) と呼んでいる。電磁誘導によって得られる誘導起電力 V は、磁束の変化量 $\Delta\phi$ と変化時間 Δt より、次式で与えられる。

$$V = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (15)$$

磁束 ϕ は、磁束密度 B に面積 S をかけたものである。これをファラデーの法則と呼んでいる。符号がマイナスになっているが、これは、磁束の変化する方向とは逆向きに電圧が発生することを意味している。マイナスの起電力が発生することで、逆向きの磁束が新たに発生し、バランスを保つようになっている。

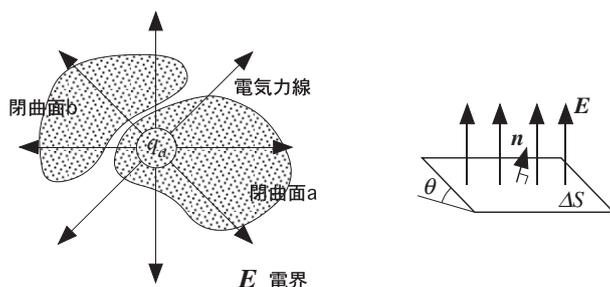
電磁誘導は、発電機だけではなく様々な用途に利用されている。例えば、金属探知器は金属の移動によって磁界が変化するため誘導起電力が得られる。空港のセキュリティチェックのゲートにおいては、ゲート自身が大きなコイルであり、そこを金属が通過すると誘導起電力が発生するので、金属を持っているかどうかを判別できる。また IH(Induction Heating) に代表される電磁調理器も電磁誘導が利用されている。これはパネルのしたに埋め込まれたコイルによって磁気を変化させ、金属鍋に誘導起電力を発生させることによって鍋を温めるものである。

1.5 マックスウェル方程式

イギリスのマックスウェル (Maxwell) は、1864 年に電場と磁場におけるガウスの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則を定式化した。それがマックスウェル方程式と呼ばれている。そして重要なことは、マックスウェル方程式によると、電磁波の存在が予測されていたことである。

1.5.1 電場におけるガウスの法則

電場におけるガウスの法則は、式 4 に示したように $4\pi r^2 E = \frac{q_a}{\epsilon_0}$ であった。これは電荷を中心とし、半径 r の球の表面積 \times 電界の強さは一定であることを示していた。なお電界の強さは、電気力線の密度に対応する。したがって半径 r の球の表面積 \times 電界の強さは、電気力線の数に対応している。ここでは、この球面を任意の閉曲面 (立体的に閉じた面) における式に拡張する。下図の左に示すような、電荷を取り囲む閉曲面 a においても、曲面から出て行く電気力線の数は球面と変わらないため、任意の閉曲面の面積 \times 電界の強さは $\frac{q_a}{\epsilon_0}$ の値となる。一方、電荷を取り囲んでいない閉曲面 b の場合には、電気力線が閉曲面に入るものと出て行くものがあるので、電気力線の総和は 0 となる。



さて、任意の閉曲面の内部に電荷があるときの電気力線の本数を表す式を立てるのに、閉曲面の微小表面を用いて積分で表す。上図の右は、閉曲面 a の一部の微小表面を取り出したものである。この微小表面の面積を ΔS とし、この断面を横切る電界の強さをベクトル E で表している。微小表面と E とは垂直とは限らず傾きを持っている。その傾きを θ とすると、微小表面に垂直な成分は、 $|E| \cos \theta$ となる。これは、微小表面の単位法線ベクトルを n とすると、内積を用いて $E \cdot n$ と表すことができる。なぜなら、 $E \cdot n = |E||n| \cos \theta$ で、 $|n| = 1$ だからである。したがって、任意の閉曲面での 4 は、次のようになる。

$$\int_s E \cdot n dS = \frac{q_a}{\epsilon_0} \quad (16)$$

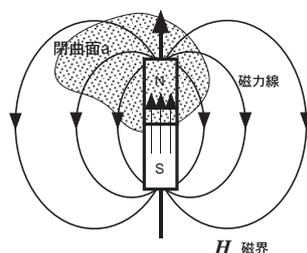
電荷に体積がある場合は、電荷密度 (electric charge density) ρ の概念を導入すれば、電荷 $q_a = \int_v \rho dv$ と表すことができる。したがって、上式は以下のように表される。

$$\epsilon_0 \int_s E \cdot n dS = \int_v \rho dv \quad (17)$$

これが、4つのマクスウェル方程式のうちの一つである。

1.5.2 磁界におけるガウスの法則

磁界におけるガウスの法則は、考え方としては電界の場合と同じである。ただ、磁界における磁力線は、必ず出て行くものと入って来るものとがある。下図のように N の磁極を取り囲むような閉曲面であっても出て行く磁力線だけでなく、磁石内部から多くの磁力線が入ってくる。



したがって、磁力線の総和は 0 となる。磁界の強さをベクトル H で表し、電界におけるガウスの法則と同様に考えると、 $\mu_0 \int_s H \cdot n dS = 0$ となり、次式を得る。

$$\int_s B \cdot n dS = 0 \quad (18)$$

これが、磁界におけるガウスの法則を表したマクスウェル方程式である。

1.5.3 アンペールの法則

アンペールの法則は、式 8 に示したように $H = \frac{I}{2\pi r}$ であった。磁束密度 B で表すと、 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ となり、 $2\pi r B = \mu_0 I$ と書ける。ガウスの法則は、点から球場に広がる様子をイメージしているが、アンペールの法則においては、導線から円筒状に広がるイメージである。したがって、導線を囲む閉曲線（閉曲面は三次元空間における面による閉じた空間を指すが、閉曲線は二次元平面における閉じた平面をさす）で積分したものとなる。したがって、次式で表すことができる。なお \oint 記号は積分を表すが、特に閉曲線において一周分の積分をするときに用いられる。

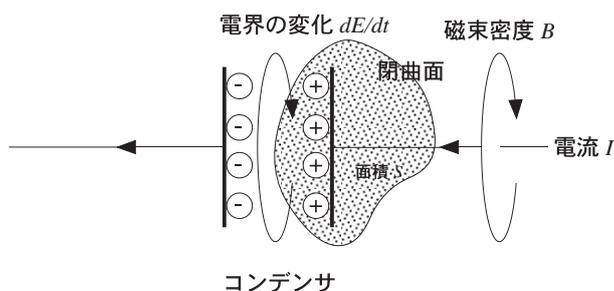
$$\oint B dr = \mu_0 I \quad (19)$$

導線の断面の断面積あたりの電流の密度を j とし、その断面の微小断面積を ΔS とすると、 $I = \int j dS$ となる。したがって上式は、次式で書き表される。

$$\oint B dr = \mu_0 \int_s j dS \quad (20)$$

これが、アンペールの法則を表したマクスウェル方程式の原型である。

マクスウェルは、この方程式に変位電流の項を加えた。アンペールの法則は、電流が流れたときに磁界が発生するというものであるが、電界の変化によっても磁界が発生する。例えば、コンデンサは 2 つの離れた電極板に電荷を溜めるものである。この電荷が溜まる過程において、電界が大きくなり、これに伴ってコンデンサのまわりにも下図のように磁界が発生する。



ある点における電界の時間的变化は、 $\frac{dE}{dt}$ で表すことができる。これを閉曲面で積分すると $\int_s \frac{dE}{dt} dS$ となる。これを電束密度で表すと $\epsilon_0 \int_s \frac{dE}{dt} dS$ となり、これは変位電流密度と呼ばれている。この項を式 20 に加えてアンペールの法則を拡張すると、次式を得る。

$$\oint B dr = \mu_0 \int_s \left(j + \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right) dS \quad (21)$$

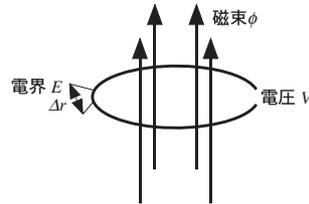
これをアンペール・マクスウェルの法則と呼んでいる。さらに、この式をベクトルで表すと、次のようになる。

$$\oint \mathbf{B} dr = \mu_0 \int_s \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (22)$$

これが、アンペールの法則を拡張したマクスウェル方程式の一つである。

1.5.4 ファラデーの法則

ファラデーの法則は、式 15 に示したように $V = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ であった。電圧 V は、式 6 に示したように、電界 E と電荷の移動距離 r の積で表すことができる。コイルのある部分における電界を E 、その部分の長さを Δr とすると、その部分での電圧は、 $V = E\Delta r$ となる。これを閉曲線全体に拡張し、コイルの両端での電圧は、 $V = \oint E dr$ となる。



磁束 ϕ は、磁束密度 B に面積 S をかけたものと同じなので、 $\phi = \int_s B dS$ と表され。ファラデーの法則は、次式で表すことができる。

$$\oint E dr = -\frac{d}{dt} \int_s B dS \quad (23)$$

これをベクトルで表すと、次式を得る。

$$\oint \mathbf{E} dr = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (24)$$

これが、ファラデーの法則についてのマクスウェル方程式である。

1.5.5 微分形式によるマクスウェル方程式

マクスウェル方程式は、式 17、式 22、式 18、式 24 の 4 つの基本方程式で構成されている。改めて書き表すと、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_v \rho dv && \text{電界におけるガウスの法則} \\ \oint \mathbf{B} dr &= \mu_0 \int_s \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS && \text{アンペール・マクスウェルの法則} \\ \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS &= 0 && \text{磁界におけるガウスの法則} \\ \oint \mathbf{E} dr &= - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS && \text{ファラデーの法則} \end{aligned}$$

これらの方程式は、積分で表されており、閉曲線や閉曲面全体での電界や磁界についてまとめられている。全体での電界や磁界の状態は、この式で十分説明できるが、ある点での状態を表現するためには、不十分である。したがって、これらの式を微分で表す式が必要となる。ベクトルの微分を利用し

てマクスウェル方程式を表現すると、次式のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{電界におけるガウスの法則} \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad \text{アンペール・マクスウェルの法則} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{磁界におけるガウスの法則} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ファラデーの法則} \quad (28)$$

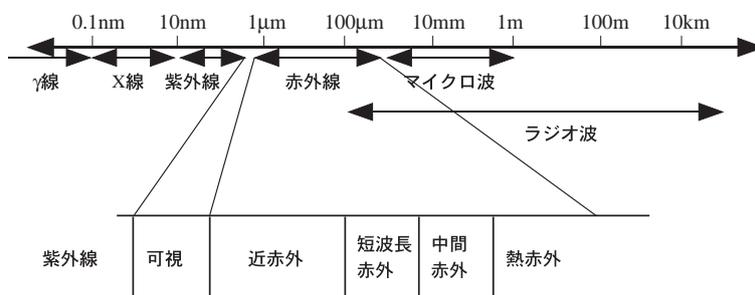
このように、すっきりとした方程式で表すことができる。これらのマクスウェル方程式は、電子回路の中での電界や磁界の状況を把握することができるだけでなく、電磁波についても説明することができる。

2 電磁波の基礎

2.1 電磁波の種類

電磁波 (electromagnetic waves) は、電波と略されたりするが、現在様々な用途に活用されている。ラジオ、テレビ、携帯電話、リモコン、電子レンジなどが代表例である。光も電磁波の一種である。電磁波は、波の性質と粒子の性質を兼ね備えている。したがって、波長 (wave length) λ をもとに電磁波が分類されている。波の伝わる速さは、光速と等しいが、どの波長の電磁波であろうと同じ速度 c である。このことから、波長が決まると周期 (period) T と振動数 (frequency) ν も決まる。周期 T は、一つの波が通過するのに要する時間である。つまり光速 $c = \lambda/T$ と計算でき、波長が長くなれば、周期も長くなる。振動数 ν は、1秒間に何個の波が通過するかを意味し、 $\nu = 1/T$ となる。よって $c = \nu\lambda$ が導かれ、波長が長くなれば、振動数は少なくなる。なお、振動数は、周波数という言葉で表現されることもある。ラジオやテレビの電磁波は、波長でなく周波数で表現される場合が多い。

現在までに解っている電磁波は、周波数にして $10^{-5} \sim 10^{22} \text{Hz}$ の範囲にある。波長の短いものから順に γ 線、X線、紫外線、可視光線、赤外線、電波等と俗に呼ばれている。下図は、波長ごとに電磁波を分類した概念図である。可視域は、 $0.4 \sim 0.7 \mu\text{m}$ で非常に狭い範囲を人間の目は感知していることになる。



電磁波の波長帯域

幅広く分布している電磁波のうち、リモートセンシングで用いられている電磁波の波長は、紫外線の一部(0.3~0.4 μm)、可視光(0.4~0.7 μm)、赤外の一部(0.7~14 μm)とマイクロ波(約1mm~1m)である。特にこれらを、可視反射赤外リモートセンシング、熱赤外リモートセンシング、マイクロ波リモートセンシングと大別することが多い。

2.2 電磁波の波動方程式

電磁波は、マクスウェル方程式によってその生成過程を説明することができる。そのために、まず何も無い真空中において、マクスウェル方程式はどうか考えてみる。電界におけるガウスの法則においては、閉曲面の中に電荷が含まれているときのものであった。真空中には電荷は存在しないため、磁界におけるガウスの法則と同様に $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ となる。また、アンペール・マクスウェルの法則においては、真空中には電流が存在しないため、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ となる。したがって真空中におけるマクスウェルの方程式は、次のように表現できる。

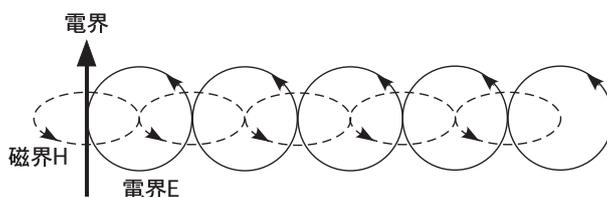
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (30)$$

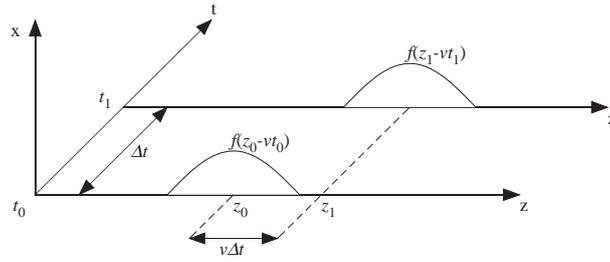
$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (32)$$

なお、磁束密度 \mathbf{B} は、磁界 \mathbf{H} で書き直した。真空中においては、さらにすっきりとした方程式になっている。電界の変化は磁界を発生させ、その磁界の向きは電界に対して垂直方向となる。このことを外積と偏微分を使って式 31 で表現している。同様に磁界の変化は電界を発生させ、その電界の向きは磁界に対して垂直方向となる。これを式 32 で表現している。したがって、下図のように電界の変化が、磁界を発生させ、それがまた電界を発生させるという無限の連鎖反応が生じる。これが電磁波の正体なのである。



電磁波は、電界と磁界が相互に発生しながら伝搬されて行く。したがって、伝搬される状況を式で表現する必要がある。下図はその概念図で、波の関数 $f()$ が z 方向に伝搬される様子を表したものである。時刻についての軸を t とし、奥行き方向にとっている。関数 $f()$ で表される波が速度 v で右方向に進んでいる。ある時刻 t_0 において波が z_0 を通過し、 Δt 後には z_1 に達している。この位置関係を速度 v を用いると、 $z_0 = z_1 - v\Delta t$ と表すことができる。



伝搬する波は、 $f(z - vt)$ で表現することができる。その理由は、次式より説明できる。

$$\begin{aligned}
 f(z_1 - vt_1) &= f(z_1 - v(t_0 + \Delta t)) \\
 &= f(z_1 - vt_0 - v\Delta t) && z_0 = z_1 - v\Delta t \text{ より} \\
 &= f(z_0 - vt_0)
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

つまり、 $f(z_1 - vt_1) = f(z_0 - vt_0)$ となり、 $f(z - vt)$ の形が維持されており、時間とともに $f()$ の波が右に移動する様子が表現される。移動方向が逆の左の場合は、 $f(z + vt)$ となる。

次に、伝搬する波の形を正弦波 (sine wave) と仮定して表す。正弦波は、 \sin 関数で表される波のことで、 $\sin x$ の場合、波長が 2π の無限に続く波が移動している状況である。波長 λ 、振幅 a とすると、波の関数 $u(z, t)$ は次式となる。

$$u(z, t) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - vt) \tag{34}$$

一つの波が通過し次の波が来るまでの時間、つまり周期を T とすると、波の進行速度 v より $\lambda = vT$ となる。したがって上式は、次のようになる。

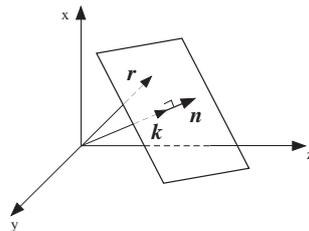
$$u(z, t) = a \sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \tag{35}$$

ここで、 $\frac{2\pi}{\lambda}$ は波の数を表しており、波数 (wave number) とよび、それを k とおく。また $\frac{2\pi}{T}$ は角振動数を表しており、 ω とおくことができる。したがって、波の関数は次式で表すことができる。

$$u(z, t) = a \sin(kz - \omega t) \tag{36}$$

さらにこの式を三次元空間の任意の方向に進む波に拡張する。このとき波は平面波 (plane wave) を仮定する。平面波は、波の集団が平面上に分布し、それが一段となって同一方向に進むような波である。例えば、太陽からの電磁波は、非常に遠いところから放射されており、地球上においては平面波と見なすことができる。

任意の方向に進む平面波を表現するとき、波の進む方向をベクトルで表す必要がある。そこで、波数 k をベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ で表現する。下図は、平面波の概念図を表したものである。



上図においては、 k の単位ベクトルを n と、任意の平面上の点へのベクトル r を図示している。 n は、平面の単位法線ベクトルに相当する。この波の関数はベクトル r となり、次式で表現することができる。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= a \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ &= a \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \end{aligned} \quad (37)$$

さらにオイラーの公式により複素関数で表現することも可能である。そのためには、正弦波で表していた波を余弦波に書き換える必要がある。正弦波を余弦波に直しても、位相が $\frac{\pi}{2}$ ずれるのみなので、波の本質的な違いは無い。それを次式に示す。

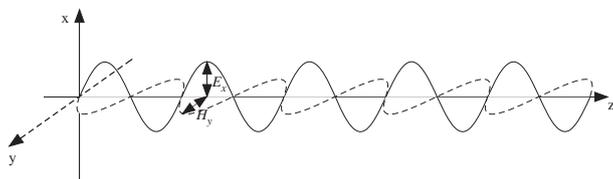
$$u(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (38)$$

i は虚数単位を表している。上式を改めて三角関数で表現すると、次式のようになる。

$$u(\mathbf{r}, t) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (39)$$

実数部と虚数部のうち、実数部のみ取り扱うことで実用上は問題ない。複素関数で表現するとにより、計算が簡単になるという利点がある。

さて、電磁波における電界と磁界を元に戻って正弦波を用いて表現し、波動方程式を求めたい。このとき、任意のベクトルを想定すると複雑になるため、単純に z 軸方向に伝搬するものとする。そして、下図のように電界は xz 平面に沿って振動し、磁界は yz 平面に沿って振動しているものとする。



z 軸上のある点における電界の強さを E_x 、磁界の強さを H_y とすると、次式で表すことができる。

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (40)$$

$$H_y = H_0 \sin(kz - \omega t) \quad (41)$$

ところで、式 31 は、任意のベクトルを対象としたものであったが、上図のように z 軸上を伝搬する場合、次式で表すことができる。

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (42)$$

式 32 についても同様に、次式で表すことができる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (43)$$

次に、式 42 の両辺を z で偏微分し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{式 43 より} \quad (44)$$

これが磁界に関する波動方程式 (wave equation) である．また電界についても，式 43 の両辺を z で偏微分し，整理すると次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\end{aligned}\quad \text{式 42 より} \quad (45)$$

これが電界に関する波動方程式 (wave equation) である．式 45 に式 40 を代入し，整理すると次式を導くことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(E_0 \sin(kz - \omega t))}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2(E_0 \sin(kz - \omega t))}{\partial t^2} \\ k \frac{\partial(E_0 \cos(kz - \omega t))}{\partial z} &= -\omega \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(E_0 \cos(kz - \omega t))}{\partial t} \\ -k^2(E_0 \sin(kz - \omega t)) &= -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (E_0 \sin(kz - \omega t)) \\ k^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \\ \frac{k^2}{\omega^2} &= \epsilon_0 \mu_0\end{aligned}\quad (46)$$

ここで， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ なので，波の速度 $v = \frac{\lambda}{T}$ は， $v = \frac{\omega}{k}$ となる．なお，電磁波の伝搬速度は光速 c に等しい．したがって光速 c は，次式で表すことができる．

$$\begin{aligned}c &= \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\end{aligned}\quad (47)$$

このように光速 c は，真空での誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 から計算できることを意味しており，非常に興味深い．

一般的な波動方程式は， x 軸方向に向かって伝搬するもので表し，次式のように，速度 v を用いて次式で表すことが多いようである．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (48)$$

電磁波の波動方程式は求まったので，ここで電界と磁界との関係について把握しておく．電界 E も磁界 H もベクトルであり，互いに直交する．そして電磁波の進む方向 S は，外積を用いて次式で計算することができる．

$$S = E \times H \quad (49)$$

このベクトル S は，ポインティングベクトル (pointing vector) と呼ばれている．

次に，電界 E と磁界 H の大きさの関係について計算する．まず，40，式 41 を式 42，式 43 のそれぞれに代入し，偏微分すると次式を得る．

$$kH_0 \cos(kz - \omega t) = \epsilon_0 \omega E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (50)$$

$$kE_0 \cos(kz - \omega t) = \mu_0 \omega H_0 \cos(kz - \omega t) \quad (51)$$

$\frac{k}{\omega}$ を左辺に移項して整理すると次式を得る .

$$\frac{k}{\omega} = \epsilon_0 \frac{E_0 \cos(kz - \omega t)}{H_0 \cos(kz - \omega t)} \quad (52)$$

$$\frac{k}{\omega} = \mu_0 \frac{H_0 \cos(kz - \omega t)}{E_0 \cos(kz - \omega t)} \quad (53)$$

したがって , 上の二式は等しいので , それを整理すると , 次のようになる .

$$\begin{aligned} \mu_0 \{H_0 \cos(kz - \omega t)\}^2 &= \epsilon_0 \{E_0 \cos(kz - \omega t)\}^2 \\ \{H_0 \cos(kz - \omega t)\}^2 &= \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \{E_0 \cos(kz - \omega t)\}^2 \\ H_0^2 &= \frac{\epsilon_0}{\mu_0} E_0^2 \\ H_0 &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \end{aligned} \quad (54)$$

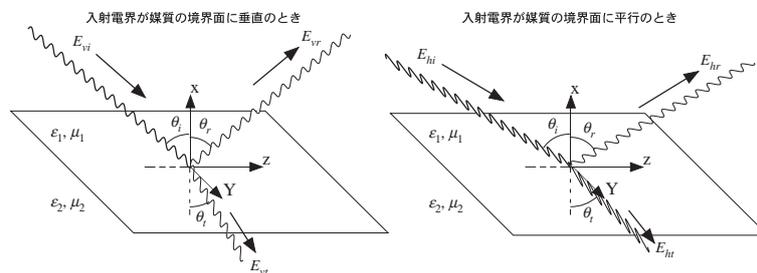
図では , 電界 E と磁界 H の振幅を同じ程度で描き表したが , 実際には透磁率 μ_0 の方が誘電率 ϵ_0 よりも極めて大きいので , 磁界の振幅 H_0 は電界の振幅 E_0 に比べて実際には非常に小さい .

3 電磁波と物質の相互作用

3.1 電磁波の反射 , 屈折 , 偏光

第 5 章において , 光の反射と屈折についてはスネルの法則に従うことを解説した . ここでは波の方程式を用いて反射と屈折の現象を定式化し , スネルの法則を導くとともに , 偏光についても言及する .

電磁波は電界と磁界が直交し , それらが伝搬する . 電界と磁界の波が伝搬するそれぞれの振動面は , 様々な方向を向いているものである . 下図は , 電界の振動する面が縦方向と横方向の場合の反射と屈折の様子を図示したものである . 下図において電磁波は , zx 平面に沿って左上から右下に向かって進んでおり , yz 平面より上側と下側とで媒質が異なっている . 上側の媒質の誘電率は ϵ_1 , 透磁率は μ_1 , 下側の媒質の誘電率は ϵ_2 , 透磁率は μ_2 としている .



左側の図は , 電界の振動面が zx 平面に平行となっており , 媒質の境界面に対して垂直に振動している様子を表している . この状況で , 入射する電磁波の電界を E_{vi} , 屈折後は E_{vt} , 反射後は E_{vr} とする . そして入射角は θ_i , 屈折角は θ_t , 反射角は θ_r で , それぞれ x 軸からの角度で表している . 一方右側

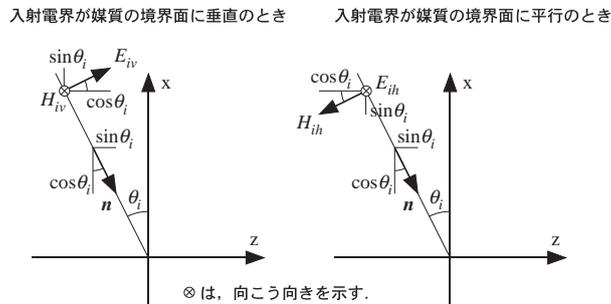
の図は、電界の振動面が zx 平面に直角となっており、媒質の境界面に対して平行に振動している様子を表している。この状況で、入射する電磁波の電界を E_{hi} 、屈折後は E_{ht} 、反射後は E_{hr} とする。

媒質の境界面に対して垂直に振動している入射電界は、複素関数を用いると $E_{iv}e^{i(k_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ と表すことができる。ここで、 \mathbf{n} は入射電界の進行方向を表し、成分にすると下図の左に示すように $(\sin \theta_i, -\cos \theta_i)$ である。 \mathbf{r} は zx 平面上なので (z, x) で表すことができ、入射電界 $u_{iv}(z, x, t)$ は次式となる。なお、上側の媒質における波数を k_1 とおく。

$$u_{iv}(z, x, t) = E_{iv}e^{i(k_1 z \sin \theta_i - k_1 x \cos \theta_i - \omega t)} \quad (55)$$

また、入射電界の振幅の z 軸方向成分 E_{ivz} は、下図の左に示すように $E_{ivz} = E_{iv} \cos \theta_i$ となる。これに対する磁界は、 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ の方向となり、紙面に対して向こう向きの y 軸に沿う向きとなる。右手系の座標においては、 y 座標の向きは紙面に対して手前向きであるため、磁界の y 軸の成分は負の値をとることになる。その大きさは、式 54 より計算できるので、入射磁界の y 軸方向成分 H_{ivy} は、 $H_{ivy} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{iv}$ となる。磁界は y 軸方向の振動なので、 z 成分も x 成分も発生せず、入射角に依存しない。これらの式を改めて示すと以下ようになる。

$$\begin{cases} E_{ivz} = E_{iv} \cos \theta_i \\ H_{ivy} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{iv} \end{cases} \quad (56)$$



媒質の境界面に対して平行に振動している入射電界の場合、入射電界の振幅の y 軸方向成分 E_{ihy} は、上図の右に示すように入射角に依存しないため $E_{ihy} = -E_{hi}$ となる（上図右のように先の磁界のときと同じ向きとした）。入射磁界の方向 H_{ih} は、 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ の方向となり、左下向きになる。したがって、その z 軸方向の成分 H_{ihz} は、 $H_{ihz} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{ih} \cos \theta_i$ となる。これらの式を改めて示すと以下ようになる。

$$\begin{cases} E_{ihy} = -E_{hi} \\ H_{ihz} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{ih} \cos \theta_i \end{cases} \quad (57)$$

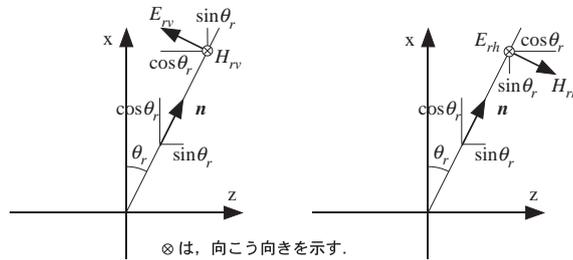
次に、反射電界について同様に考える。媒質の境界面に対して垂直に振動している反射電界 $u_{rv}(z, x, t)$ は次式で表される。

$$u_{rv}(z, x, t) = E_{rv}e^{i(k_1 z \sin \theta_r - k_1 x \cos \theta_r - \omega t)} \quad (58)$$

そして、反射電界の振幅の z 軸方向成分 E_{rvz} と、これに対する反射磁界の y 軸方向成分 H_{rvy} は、次式で表すことができる（下図の左参照）。

$$\begin{cases} E_{rvz} = -E_{rv} \cos \theta_r \\ H_{rvy} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{rv} \end{cases} \quad (59)$$

反射電界が媒質の境界面に垂直のとき 反射電界が媒質の境界面に平行のとき



媒質の境界面に対して平行に振動している反射電界において、反射電界の y 方向成分 E_{rhy} と、これに対する反射磁界の z 軸方向成分 H_{rhz} は、次式で表すことができる（上図の右参照）。

$$\begin{cases} E_{rhy} = -E_{rh} \\ H_{rhz} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{rh} \end{cases} \quad (60)$$

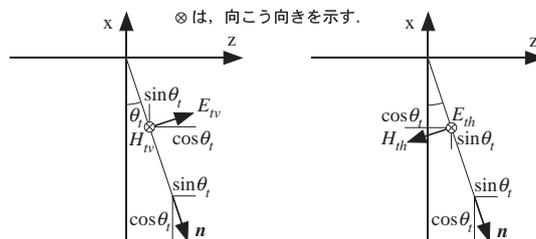
次に、透過電界について同様に考える。媒質の境界面に対して垂直に振動している透過電界 $u_{tv}(z, x, t)$ は次式で表される。なお、下側の媒質における波数を k_2 とおく。

$$u_{tv}(z, x, t) = E_{tv} e^{i(k_2 z \sin \theta_r - k_2 x \cos \theta_t - \omega t)} \quad (61)$$

そして、透過電界の振幅の z 軸方向成分 E_{tvz} と、これに対する透過磁界の y 軸方向成分 H_{tvy} は、次式で表すことができる（下図の左参照）。

$$\begin{cases} E_{tvz} = E_{tv} \cos \theta_t \\ H_{tvy} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{tv} \end{cases} \quad (62)$$

屈折電界が媒質の境界面に垂直のとき 屈折電界が媒質の境界面に平行のとき



媒質の境界面に対して平行に振動している透過電界において、反射電界の y 方向成分 E_{thy} と、これ

に対する透過磁界の z 軸方向成分 H_{thz} は，次式で表すことができる（上図の右参照）．

$$\begin{cases} E_{thy} = -E_{th} \\ H_{thz} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{th} \end{cases} \quad (63)$$

さて，媒質の境界面においては，入射電場と反射電界の合計が透過電界と釣り合わなければならない．そこで，式 55, 58, 61 の z 軸成分を対象とし，境界面なので $x = 0$ を代入すると，境界面に対して垂直な電界も平行な電界も次式で表すことができる．なお， ωt の項は省略した．

$$\begin{cases} E_{ivz}e^{ik_1z \sin \theta_i} + E_{rvz}e^{ik_1z \sin \theta_r} = E_{tvz}e^{ik_2z \sin \theta_t} \\ E_{ihy}e^{ik_1z \sin \theta_i} + E_{rhy}e^{ik_1z \sin \theta_r} = E_{thy}e^{ik_2z \sin \theta_t} \end{cases} \quad (64)$$

この式が，どのような z の値であろうと成り立つためには次式が満たされなければならない．

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (65)$$

したがって， $\theta_i = \theta_r$ と $k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t$ というスネルの法則が導かれる． k_1, k_2 が屈折率に相当し， $k_1 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}, k_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}$ である．この式が満たされれば，64 は次式のように簡単な式で表すことができる．

$$\begin{cases} E_{ivz} + E_{rvz} = E_{tvz} \\ E_{ihy} + E_{rhy} = E_{thy} \end{cases} \quad (66)$$

磁界についても同様に考えると，次式を得る．

$$\begin{cases} H_{ivy} + H_{rvy} = H_{tv} \\ H_{ihz} + H_{rhz} = H_{thz} \end{cases} \quad (67)$$

これらの式に式 56, 57, 59, 60, 62, 63 を代入すると次式を得る．

$$\begin{cases} E_{iv} \cos \theta_i - E_{rv} \cos \theta_r = E_{tv} \cos \theta_t \\ -E_{ih} - E_{rh} = -E_{th} \\ -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{iv} + -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{rv} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{tv} \\ -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{ih} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{rh} = -\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{th} \end{cases} \quad (68)$$

これらの式とスネルの法則を用いて，入射電界と反射電界の比を求める．この比はいわゆる振幅反射率に相当する．媒質の境界に対して垂直に振動する電界の場合には，次式ようになる．なお屈折率の比は n で表した．つまり $n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} / \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}$ を用いた．

$$\frac{E_{rv}}{E_{iv}} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (69)$$

媒質の境界に対して垂直に振動する電界の場合には，次式ようになる．

$$\frac{E_{rh}}{E_{ih}} = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (70)$$

次に入射電界と透過電界の比を求める．この比はいわゆる振幅透過率に相当する．媒質の境界に対して垂直に振動する電界の場合には，次式ようになる．

$$\frac{E_{tv}}{E_{iv}} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (71)$$

媒質の境界に対して垂直に振動する電界の場合には，次式ようになる．

$$\frac{E_{th}}{E_{ih}} = \frac{2 \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (72)$$

これら式 69~72 は，フレネルの式と呼ばれている．振幅反射率の式をみると，媒質の境界面に対して垂直の振動している場合，分子の値は小さくなり，反射後の振幅は非常に小さくなるのが分かる．特に入射角度 θ_i によっては分子の値が 0 になる場合もある．この角度をブリュースター角 (Brewster's angle) と呼んでいる．

太陽から降り注ぐ光(電磁波)において，電界面はあらゆる方向を向いている．この光が何かに反射すると，反射面に対して垂直に振動する電界面を持つ光は非常に弱くなり，平行に振動する電界面を持つ光が卓越することになる．このように，ある一定方向に電界面が偏った光を偏光 (polarisation) と呼んでいる．サングラスの中には，偏光サングラスというものもある．これはレンズにたくさんのスリットを入れることによって入ってくる光の量を少なくしている．そして，単に光の量が少なくなるだけでなく，特定の振動面を持つ光をカットすることができる．つまり，スリットに対して直角方向の電界面を持つ光は，透過できない．例えば，水面やガラスに反射する光は，特定の向きの電界面を持つものが多いので，偏光サングラスによってそれらをカットし，水面の中やガラスの中を見やすくする機能もある．

3.2 電磁波に関する物理量

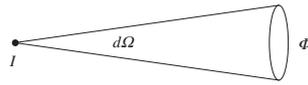
電磁波が発生し，四方八方に伝搬して行くことを放射 (radiation) と呼んでいる．電磁波の放射は，エネルギーを持っている．放射エネルギー (radiant energy) の単位は (J) である．単位時間あたりの放射エネルギー (J/s) は，放射束 (radiant flux) あるいは光束と呼ばれ，単位は (W) に相当する．実用単位としてルーメン (lm) が一般に利用されている．身近なところでは，プロジェクタの明るさを表すのに利用されている．

放射束を単位面積あたりの値に換算したものが放射発散度 (radiant exitance) である．つまり放射発散度は，放射源から射出される単位時間，単位面積あたりのエネルギーといえる．これに対して，放射源から，ある面に対して照射される単位時間，単位面積あたりのエネルギーは，放射照度 (irradiance) と呼ばれている．放射発散度 M_e と放射束 Φ の関係は，面積を S とすると，次式で表される．

$$M_e = \frac{d\Phi}{dS} \quad (73)$$

単位は (W/m²) となる．実用単位はルクス (lx = lm/m²) が一般に利用されている．

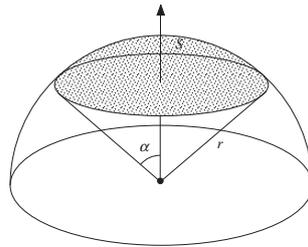
放射源が点の場合には，放射源から離れるに従って，放射照度は小さくなる．そこで放射束を立体角あたりの値に換算した放射強度 (radiant intensity) が使いやすい．下図は，その様子を表している．



放射強度 I_e と放射束 Φ とは，立体角を Ω とすると次式で表される．

$$I_e = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (74)$$

放射強度 I_e の単位は (W/sr) となる．実用単位はカンデラ (cd = lm/sr) が一般に利用されている．立体角は，三次元での角度を表すのに利用されているもので，下図に示すように円錐の頂点の三次元角度の概念である．円錐の中心軸と母線との平面上の角度は α であるが，立体角はこれとは異なる．

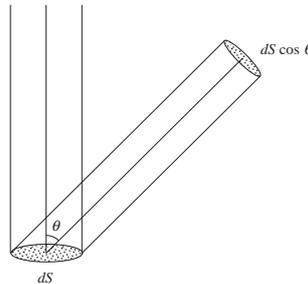


立体角 Ω は，円錐の底面が接する球面上の面積 S と母線の長さ r の関数で以下のように表すことが出来る．

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (75)$$

単位は sr, ステラジアンと呼んでいる．球の表面積は， $4\pi r^2$ なので，全球の立体角は， 4π (sr) となる．

次に，放射源が面的に広がっている場合を考える．面積がある場合，放射面に対して法線方向から得られるエネルギーは最大となるが，斜めになるとそのエネルギーは小さくなる．下図のように，ある微小面積 dS を考えた場合，法線からの角度 θ 傾いたときの微小面積は， $dS \cos \theta$ となる．



そこで放射源が面の場合には，単位面積あたりの放射強度に換算された放射輝度 (radiance) が用いられる．放射輝度 L_e は，放射強度 I_e を用いて次式で計算される．

$$L_e = \frac{dI_e}{dS \cos \theta} \quad (76)$$

さらに，放射束で放射輝度を表すには， $I_e = \frac{d\Phi}{d\Omega}$ より，次式が得られる．

$$L_e = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos \theta} \quad (77)$$

放射輝度の単位は、 $(W/sr \cdot m^2)$ となる。実用単位はスチルブ (cd/cm^2) が一般に利用されている。

3.3 電磁波の放射と吸収

3.3.1 黒体放射

物質は電磁波を放射 (radiation) しており、特にその放射が熱に依存しているものを熱放射と呼んでいる。逆に、熱を持っている物質はすべて熱放射 (heat radiation) しているといえる。物質が熱を持つと色が変化する。例えば電熱線を用いたヒーターは、温度が上昇するに連れて赤からオレンジ、黄色へと変化する。明るさも増す。つまり熱を持つほどに放射の量も多くなる。この熱放射は、通常物質ごとに放射特性を持っている。ある電磁波の波長帯は放射効率がよく、ある波長帯は放射効率が低いという、選択的放射体がほとんどである。また、入射する電磁波をよく吸収するものほど、よく放射するという性質を持つ。黒い服は太陽の光を吸収しやすく、暖くなるのはこのためである。したがって完全吸収体の場合は、温度だけで放射量が一意的に決まることになる。このような物体を黒体 (black body) と呼び、黒体の熱放射を黒体放射 (black body radiation) という。つまり黒体は、入射するすべての電磁波を完全に吸収し、反射も透過もしない物質で、ある温度において、他のどの物質よりも大きい放射をするものである。このことは、1859年にロシア生まれのキルヒホッフ (Kirchhoff) によって発見された。熱放射の量は、波長 λ と温度 T にのみに依存するというものである。この法則は、温度は色を測ることによって推算できることを示しており、現在ではサーモグラフィーなどに利用されている。

キルヒホッフの熱放射則を理論的に導くことに成功したのは、ドイツのプランク (Planck) で1900年のことである。プランクは、オーストリアのボルツマンの発見した統計力学の法則を利用した。光をはじめとする電磁波は、つまるところ、たくさん存在する電子の振る舞いによるものなので、その振る舞いは統計的に説明できるということに基づいている。このことから、電磁気学は、統計力学へと発展することになる。さて、電磁波は、時間的に変化する。ボルツマンは、温度 T によるエネルギーの時間平均 $\langle E \rangle$ は、 $\langle E \rangle = \frac{1}{2}kT$ で表されることを示した。ここで k は定数であり、ボルツマン定数と呼ばれている。そして、ある一定時間内において、エネルギー状態 E にあるときの回数 $P(E)$ は、次式で表されることを統計計算によって導いた。

$$P(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}} \quad (78)$$

ここで、 A は定数であり、 e は自然対数である。この式は正規分布を導くときに出て来た式??と非常に似ている。この式をプランクは利用した。このとき、電磁波の持つエネルギー E は、 $E = nh\nu$ で表されるものとしている。 h はプランク定数と呼ばれる定数で、 ν は電磁波の振動数、 n は整数である。振動数が大きいほどエネルギーも大きくなることを表している。 n が $0, 1, 2, \dots$ という整数であるところが妙なところであるが、このことを導入すれば、熱放射の理論と実測とが合致するのである。 $n = 0, 1, 2, \dots$ のときのエネルギー状態にある回数は、 $P(0), P(1), P(2), \dots$ となり、エネルギーの総和は、次式で求めることができる。

$$0h\nu P(0) + 1h\nu P(1h\nu) + 2h\nu P(2h\nu) + \dots \quad (79)$$

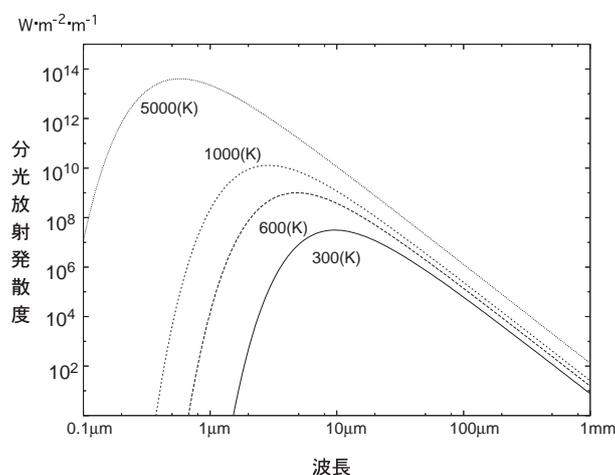
これをエネルギー状態ごとの回数の総和で割ると、エネルギーの平均値が算出される。

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{0h\nu P(0) + 1h\nu P(1h\nu) + 2h\nu P(2h\nu) + \dots}{P(0) + P(1h\nu) + P(2h\nu) + \dots} \\
 &= \frac{h\nu(0 + e^{-\frac{h\nu}{kT}} + 2e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots)}{e^0 + e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots} \\
 &= h\nu \frac{0 + x + 2x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} \quad x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \text{ とおいた} \\
 &= h\nu \frac{x}{1 - x} \\
 &= \frac{h\nu}{x - 1} \\
 &= \frac{h\nu}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{80}
 \end{aligned}$$

この式により、電磁波の振動数ごとのエネルギーを計算することができる。エネルギーで表したこの式を放射発散度 $M_e(\lambda, T)$ に直すと、次式となる。 c は光速であり、 $c = \nu\lambda$ である。

$$M_e(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \tag{81}$$

この式を利用し、 $T = 300[\text{K}]$ から $5000[\text{K}]$ における各波長ごとの放射発散度を計算すると下図のようになる。



温度が上がるに連れて、放射のピークが赤外域より可視域に移りつつ、その量も多くなっている。太陽は約 $5900[\text{K}]$ の黒体と近似されており、可視域の黄色い部分にピークを持つ放射源となっている。

黒体の放射発散度 M_e から放射輝度 L_e に変換する。このとき黒体の放射輝度を特別に B で表すと、次式となる。

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \tag{82}$$

プランクの法則で基本的に黒体の放射エネルギーを計算できるが、振動数が大きい場合、小さい場合とで近似式を導くことができる。例えば、振動数が大きいとき、つまり波長が短い場合には、

$\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ より, $e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1 \doteq e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ が得られ, 次式を得る.

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-\frac{hc}{\lambda T}}} \quad (83)$$

これをウィーン (Wien) の放射法則といい, $\lambda = 0.9 \sim 10\mu\text{m}$, T にして常温から約 3200 までの範囲で使用できる.

一方, 振動数が小さいとき, つまり波長が長い場合には, $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ より, $e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1 \doteq \frac{h\nu}{kT}$ が得られ, 次式を得る.

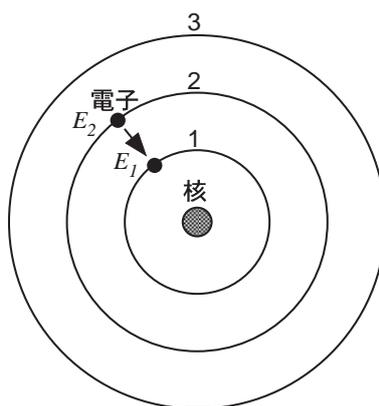
$$B(\lambda, T) = \frac{2c}{\lambda^4} kT \quad (84)$$

これをレーリー・ジーンズ (Rayleigh-Jeans) の放射法則という. $\lambda = 3\text{mm} \sim 30\text{mm}$ のマイクロ波の範囲で使用できる.

3.3.2 放射の原理

真空に近い状態で, ある気体が封入されたガラス管の中に電極があり, 電極間に電圧をかけると, 気体特有の色の発光現象が見られる. これは真空放電 (vacuum discharge) と呼ばれている. 蛍光灯の原型とも言えるが, この光は, 特有の波長をもった電磁波として捉えられる. この電磁波の放射について, 水素原子を例に説明すると, 次のようになる.

水素原子は下図のように, 1 個の原子核と 1 個の電子から構成される. そして電子はとびとびの軌道上に存在する. 半径が中途半端な軌道というものは無いようで, この理由は良く解っていないらしい. 一番内側の軌道を電子が周回するときと, 外側の軌道を周回するときでは, 運動する電子のもつエネルギーが異なり, 外側ほどエネルギーが大きい. これは, 1913 年にデンマークのボーア (Bohr) が提唱した量子条件によって説明している.



上図では, 2 番目の軌道上にある電子が, 1 番目の軌道に移る状況を示したものである. 2 番目の軌道にある電子の方が, 1 番目の軌道にある電子よりもエネルギー準位 (energy level) は高い. 2 番目の軌道にあるときのエネルギーが E_2 , 1 番目の軌道にあるときのエネルギーが E_1 とすると, 軌道が 1 番目に移ることで $E_2 - E_1$ のエネルギーが減り, 減ったエネルギー分が電磁波として放射 (radiation) される. つまり, 真空に近いガラス管の内部は, エネルギー準位の高い水素があり, 電圧をかけるこ

とによってガラス管の内部の電子の数が増え、水素原子上を回る電子とぶつかることによってエネルギー準位が低くなり、光が放たれる。エネルギー準位が高い状態のことを励起 (Excitation) 状態と呼ぶ。なお、電子の軌道が内側に移動するときは電磁波が放射されるが、逆に外側に移動するときは電磁波が吸収 (absorption) される。

真空放電において放射される電磁波は、移る軌道に応じて特徴的な波長 (振動数) を持っている。水素原子については、1890年にスウェーデンのリュードベリ (Rydberg) が波長と移動する軌道との関係を明らかにした。 n 番目の軌道から m 番目の軌道に移るときに放射される電磁波の波長 λ (振動数 ν) は、次式で表すことができる。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (85)$$

ここで、 R は定数であり、リュードベリ定数と呼ばれている。

黒体放射の項においても解説したが、電磁波のエネルギー E は、次式で与えられる。

$$E = \frac{hc}{\lambda} = h\nu \quad (86)$$

プランクは $E = nh\nu$ としたが、1905年、ドイツのアインシュタイン (Einstein) は、光量子仮説を提唱し上の式を導いた。電磁波が一つ一つの粒によって構成されているというもので、その粒は光子 (photon) と呼ばれている。つまり上式におけるエネルギーは、光子一つの持つエネルギーと解釈し、矛盾を無くしている。

4 リモートセンシングにおける電磁波の観測

4.1 可視近赤外リモートセンシング

可視反射赤外リモートセンシングは、太陽光の反射を利用している。太陽光は $0.5\mu\text{m}$ をピークに持つ放射源である。一方物質からの放射は $10\mu\text{m}$ をピークに持つ。当然、太陽光の反射と物質の放射とが混在する部分が存在し、それらが $3\mu\text{m}$ 付近で均衡状態となっている。したがって反射赤外域は $0.7 \sim 3\mu\text{m}$ の範囲とされている。この領域のリモートセンシングは、地上物質の反射特性の違いから物体の判別を行うものである。すべての物質は、それぞれ固有の性質として電磁波を反射吸収透過し、それ自身放射する。われわれは目である程度その特徴を見ることができる。たとえば植物が緑に見えるのは葉中のクロロフィルが青赤の光を吸収し緑をよく反射するからである。このように電磁波に対する物質固有の波長特性を分光特性と呼ぶ。

4.1.1 大気による電磁波の吸収と散乱

可視近赤外リモートセンシングでは、太陽からの放射された電磁波が地球表面で反射し、再度大気を透過してくる電磁波を受けている。したがって大気による電磁波の吸収と散乱の現象を把握しておくことは非常に重要である。一般に、大気による吸収・散乱は、電磁波を減衰させることを意味し、消散と呼ばれる。特に消散の割合を消散係数という。

大気は、大きく分子とエアロゾル (aerosol) で構成されている。分子は、窒素 (N_2)、酸素 (O_2) の他炭酸ガス (CO_2) やオゾン (O_3)、などが該当し、粒径が小さい。一方エアロゾルは、霧や霞みなどの水蒸気、スモッグ、塵などが該当し、粒径の大きいものをさしている。これら大気中の分子やエアロゾルは、電磁波を吸収・散乱するが、波長帯によってその割合が異なる。なお、 N_2 、 O_2 、Ar 等は、ほとんど吸収に寄与していない。

電磁波の減衰は、散乱によっても大きな影響を与えられている。一般に分子による散乱をレーリー散乱 (Rayleigh scattering)、エアロゾルによる散乱をミー散乱 (Mie scattering) 散乱と呼んでいる。レーリー散乱において、1個の粒子における散乱光の強さ I_s は、 α を分極率、 θ を散乱角、 λ を波長、 I_i を入射光の強さ、 $d\omega$ を立体角、 $d\omega'$ 散乱光束の立体角とすると、次式で表される。

$$I_s = \left(\frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \alpha^2 / d\omega \right) \cdot \frac{3}{4} (I_i + \cos^2 \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} \quad (87)$$

この式は、波長の 1/10 以下の微粒子の場合に適用できる。 ρ を大気の密度、 N を単位体積あたりの微粒子の数、 γ を大気の屈折率とすると、レーリー散乱による消散係数 (extinction coefficient) K_λ は次式となる。

$$K_\lambda = \frac{8\pi^3(\gamma^2 - 1)^2}{3\lambda^4 N \rho} \quad (88)$$

消散係数は、散乱による放射強度の減衰率を表すものである。消散係数を見ると、散乱光の強さは、波長 λ の 4 乗に反比例していることから、波長が長いものほど散乱光の放射強度は弱く、あまり散乱しないことを示している。逆に波長が短いものほど散乱光の放射強度が強い。空の色が青いのは、レーリー散乱によるもので、太陽光のうち、青く短い波長の光が散乱しているためである。

レーリー散乱において、粒子の大きさが波長よりも大きい場合、理論値と実測値にずれが生じてくる。粒子の形状を表す項が含まれていないからである。そこでミーは、消散係数に散乱断面積係数を導入した。 b を粒子の半径、 $K()$ を散乱断面積係数とすると、次式で表すことができる。

$$K_\lambda = \pi b^2 K \left(\frac{2\pi b}{\lambda}, \gamma \right) \quad (89)$$

水蒸気による散乱は、白っぽくなる。よって光の波長には依存していない。つまり、粒子が大きいためどのような波長の波も散乱するためである。

光学式センサで観測した場合、取得できる情報は、地上から反射・放射される電磁波のほかに、大気の散乱による電磁波も存在する。この散乱による入射をパスラジアンズと呼んでいる。

4.1.2 放射伝達

放射伝達とは、電磁波が大気の影響を受けながら伝播する過程をいう。大気の影響には電磁波を減衰させる働きのある乗法性因子と、増幅させる働きのある加法性因子とがある。乗法性因子は消散 (extinction) を意味し、電磁波の吸収および散乱によって生じる。先にも述べたように、大気中の分子が特定波長域の電磁波を吸収する。散乱による消散は、対象物からセンサに向かう電磁波のエネルギーが散乱によって方向を曲げられることによる。特に短波長域で散乱は顕著に生じる。

一方加法性因子は射出 (emission) を意味し、電磁波の放射および散乱によって生じる。センサは対象物からの放射を受けるだけでなく、大気中の分子・エアロゾルからの放射も受ける。この放射現象は先にも述べたようにプランクの放射法則に基づく。また熱放射はどの方向にも一樣な大きさを放射される。散乱による射出エネルギーは、散乱体の形及び大きさ、入射方向・散乱方向に依存する。そしてその方向は対象物からセンサに向かう方向以外からの電磁波の散乱に依存するため一樣ではない。

熱力学的に平衡状態にあるときは、射出量と消散量が一致しており、その比はプランク関数によって表現できる。これはキルヒホッフの法則と呼ばれている。ある波長 λ における射出係数を j_λ 、消散係数を k_λ とすると、次式で表される。

$$\frac{j_\lambda}{k_\lambda} = B(\lambda, T) \quad (90)$$

電磁波が媒質を通ったとき、消散によって放射輝度 I_λ がどの程度減衰するかは、媒質を通る経路長 ds に依存する。経路が長いほど消散の量も大きい。媒質の密度を ρ とすると、放射輝度の変化量 dI_λ は、次式で表すことができる。

$$dI_\lambda = -k_\lambda \rho I_\lambda ds \quad (91)$$

射出についても同様に、次式で表すことができる。

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds \quad (92)$$

以上の消散・射出現象は同時に生じるため、その両者を同時に表さなければならない。それが放射伝達式である。なお式 90 より、 $j_\lambda = k_\lambda B(\lambda, T)$ となり、熱放射のプランク関数を一般的な放射源の関数として J_λ で表すと、 $j_\lambda = k_\lambda J_\lambda$ となる。したがって、放射伝達式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} dI_\lambda &= -k_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds \\ &= -k_\lambda \rho I_\lambda ds + k_\lambda J_\lambda \rho ds \\ \frac{dI_\lambda}{\rho k_\lambda ds} &= -I_\lambda + J_\lambda \end{aligned} \quad (93)$$

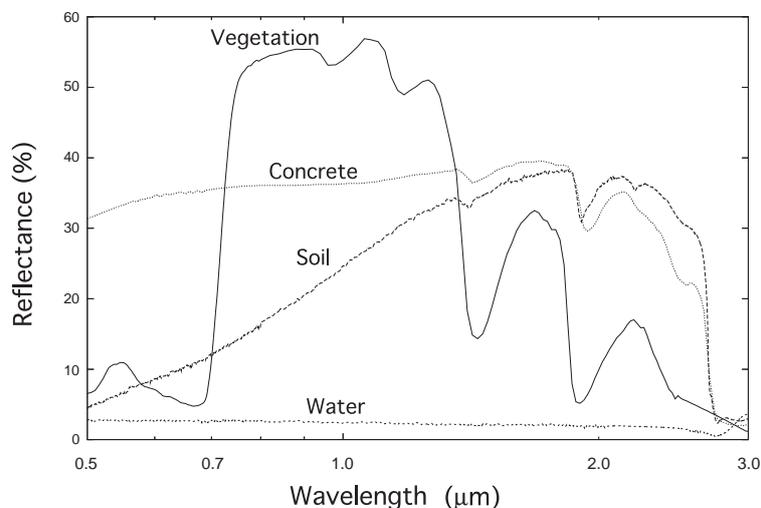
放射伝達モデルを実際に解くのは、非常に困難であるが、それを組み込んでいるシミュレーションソフトが幾つかある。その一つが、LOWTRAN である。これはアメリカ AFGL (Air Force Geophysics Laboratory) が開発したもので、モデルや大気パラメータに応じて大気分光透過率や放射量を計算することができる。現在は、MODTRAN とよばれるシミュレーションソフトに拡張されている。また 6s (Second Simulation of the Satellite Signal in the Solar Spectrum) というシミュレーションソフトもある。こちらは主な人工衛星のセンサ情報も組み込まれており、センサごとに放射量等をシミュレートすることができる。

4.1.3 分光反射特性

分光反射特性は一般に、波長ごとの反射率を表す。反射率は、ある面への入射光束に対する反射光束の比率であり、0 から 1 の範囲で表現される。本来は白色光の半球全方向の入射と反射の比率のこ

とをいい、太陽光を入射光とした場合の反射率は特にアルベドと呼ばれる。また、同義語として反射係数がある。これは完全拡散面からの反射光束との比率である。なお完全拡散面とは、方向によって反射光束の量が変わらない均等拡散面で、反射率が1の面のことである。

地表面は大まかに植物・土壌・水で構成される。下図はそれらの分光反射率を表している。



この図において最も特徴的なのは植物の分光反射特性である。近赤外の領域で最も強く反射し、可視の赤の領域の反射は非常に弱いことが解る。この特徴を利用し、センサに入射する近赤外域のカウント値と可視域のカウント値の比を用いて植生指標を算出することができる(後述)。もちろん、植物の種類に応じて分光反射率に違いは生じるが、波に含まれるクロロフィルの量が反射率に影響を及ぼしているため傾向は同一である。

水は、透明度の善し悪しに関わらず赤外域では反射しない特徴を持つ。ただし濁った水は反射率が高くなる傾向がある。

土壌は波長が長くなるにつれて次第に反射率が大きくなる。土壌もそれぞれ種類があり、それ毎に微妙に分光反射特性は変わってくる。また構成される粘土鉱物、水分量に依存する。なお岩石・粘土鉱物の分光反射率は、微妙な違いはあるものの明白な違いは少ない。したがって、岩石・鉱物を識別するにはスペクトル分解能の非常に高いセンサが望まれる。もっとも土壌は、それを構成する物質は単一でなく水分量によっても分光特性は極端に変わる。一般に水を含むと反射率は下がる傾向にある。水が、赤外域において電磁波を吸収する特性に依存している。したがって、状況によって分光反射特性に変化が見られ、リモートセンシングによる土壌の判別は困難を極める。

4.2 熱赤外リモートセンシング

熱赤外リモートセンシングは、物体の放射する電磁波を検知することによって行われる。対象となる電磁波の波長域は、先に述べた反射赤外域よりも長い波長の3~14μmの範囲である。放射量は温度に依存するため熱赤外と呼ばれ、海水面温度を推定するのに利用されている。

4.3 マイクロ波リモートセンシング

マイクロ波リモートセンシングは、さらに長い波長帯域を利用するものである。この領域になると物質からの放射は少なくなる。したがって、物体からの放射量を測定する受動型センサの他に、センサ自身がマイクロ波を放射し地上で散乱されて戻ってきた受信電力を測定する能動型センサがある。受動型センサは、先の熱赤外リモートセンシングと同様、対象物体の出す放射輝度を測定するが、能動型センサは、センサの出す電波の対象物体による後方散乱成分を測定する。

電磁波が入射し、境界面でのみ散乱が生じる現象を表面散乱と呼ぶ。これに対して、媒質中で散乱が生じる現象を体積散乱と呼ぶ。地表面や水面によるマイクロ波の散乱は表面散乱である。したがってここでは表面散乱について解説する。表面散乱の強さは、媒質表面の複素誘電率の増加とともに強くなり、その散乱角特性は、表面の粗さによって決まる。表面が滑らかである（表面の粗さが波長に比べて小さい場合）と鏡面反射となり、入射波と反対の方向に大きな散乱成分を持つ。その反射の大きさはフレネルの反射係数で表すことができる。一方、表面が粗くなると散乱の成分が多くなる。特に鏡面反射の成分はコヒーレント成分と呼び、散乱の成分はインコヒーレント成分と呼ぶ。インコヒーレント成分はあらゆる方向性をもっている。ランダムな表面散乱の程度は、使用する電磁波の波長と観測する物体の表面の粗さのスケールの相対関係によって決まる。表面の粗さの指標として、レーリーの基準とフラウンフォーファーの基準がある。レーリーの基準は、ある面に入射角 θ で電磁波を当てた場合、次式で表すことができる。

$$\Delta\phi = 2k\Delta h \cos\theta < \frac{\pi}{2} \quad (94)$$
$$\Delta h < \frac{\lambda}{8 \cos\theta}$$

λ ：電磁波の波長， Δh ：表面の粗さの標準偏差， $k(=2\pi/\lambda)$ ：波数となり、この式は二つの反射波の位相差 $\Delta\phi$ が $\pi/2$ ラジアン以下であれば、表面は滑らかであることを意味する。一方、フラウンフォーファーの基準では、

$$\Delta\phi = 2k\Delta h \cos\theta < \frac{\pi}{8} \quad (95)$$
$$\Delta h < \frac{\lambda}{32 \cos\theta}$$

となる。こちらの基準の方が厳しく、使いやすいといわれている。

衛星搭載の合成開口レーダやマイクロ波散乱計によって観測できる散乱は、入射方向のものに限定される。この入射方向の散乱を特に後方散乱という。レーダ断面積 σ は次式で表すことができる。

$$\sum \sigma_i = \frac{P_r(4\pi)^3 R^4}{P_t G^2 \lambda^2} \quad (96)$$

P_t ：レーダの送信電力， λ ：波長， R ：レーダからの距離， G ：アンテナの利得， P_r ：受信電力

散乱面の面積が A のとき , 単位面積あたりの平均散乱断面積 $\sigma_0 = \sigma_i/A_i$ を後方散乱係数(backscattering coefficient) と呼び , 表面の粗さによって異なった入射角依存性を持つ . したがってマイクロ波データは , この粗さが画像化されるものである .