人工衛星位置推算の実際（最終版）

1　軌道要素

軍事衛星でなければ，軌道要素は公開されているので，”Space Track”などのホームページより軌道要素のデータはダウンロードできる．2006 年 1 月に打ち上げられた地球観測衛星 ALOS の軌道要素は，次の通りである．

- 元期 ET (Epoch Time)：軌道要素を確定した時刻　2006 年 120.72277529 日 (UT)
- 近地点引数 ω (Argument of perigee)　$\omega_0 = 14.7699°$
- 軌道傾斜角 i (inclination angle)　$i = 98.2104°$
- 昇交点赤経 Ω (right ascension of ascending node)　$\Omega_0 = 195.1270°$
- 離心率 e (Eccentricity)　$e = 0.0001679$
- 平均近点角 M_0 (Mean Anomaly)　$M_0 = 345.3549°$
- 平均運動 M_1 (Mean Motion)　$M_1 = 14.59544429$(rev/day)
- 平均運動変化係数 M_2　$M_2 = 0.00000232$(rev/day^2)

この軌道要素を用いて ALOS の位置を計算する．観測時刻として 2006 年 5 月 15 日 11 時 (JST) を設定し，具体的な計算例を示す．

2　軌道長半径 a の計算

まず，観測時刻が元期から何日経過しているかを計算しなければならない．観測時刻は日本標準時で与えられているので，それを世界時 (UT) で表すと 5 月 15 日 2 時ということになる．これを 2006 年の 1 月 1 日からの日数に直すと，135.0833333 日という結果が得られる．したがって，元期からの経過日数 Δt は 14.36055804 日となる．

次に軌道長半径 a をケプラーの第 3 法則により計算する．そのためには公転周期 T が必要であるが，軌道要素においては，平均運動 M_1 が与えられている．平均運動は，一日に公転を何回 (rev) するかを表しているので，その逆数が公転周期 (day) となる．したがって軌道長半径 a は，以下の式で計算できる．

$$a = \left(\frac{GM}{4\pi^2 M_1^2} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

ただ，平均運動はその変化係数が与えられている通り，毎日変化している．したがって元期からの経過日数 Δt より観測時刻の平均運動 M_m は，以下の式で計算できる．

$$\begin{aligned} M_m &= M_1 + M_2 \Delta t \\ &= 14.59544429 + 0.00000232 \times 14.36055804 \\ &= 14.59547761 (\mathrm{rev/day}) \end{aligned} \tag{2}$$

式 (1) における係数 GM は，地球周回軌道の人工衛星の場合，次の値となっている．

$$GM = 2.975537 \times 10^{15} (\mathrm{km}^3/\mathrm{day}^2) \tag{3}$$

この値を利用し，ALOS の平均運動を代入して軌道長半径を求めると，以下のようになる．

$$a = \left(\frac{2.975537 \times 10^{15}}{4\pi^2 \times 14.59547761^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 7072.772117 (\mathrm{km}) \tag{4}$$

得られた値から地球の赤道半径の値を引いて，ALOS の高度を求めると，約 694.612 (km) 上空を周回しているという結果が得られる．

3　離心近点角 E の計算

次にケプラーの第 2 法則により離心近点角 E を求める．そのためには観測時刻の平均近点角 M を求めなければならない．軌道要素で与えられているのは，元期における平均近点角なので，平均運動の値とその変化係数を用いて計算する．平均運動を求めた式 (2) を積分し，積分定数として M_0 を与えれば，観測時刻の平均近点角が求まる．なお，軌道要素における平均近点角 M_0 は，角度で与えられているのでこれを 1 回転を 1 とする単位 (rev) に変換しなければならない．

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1 \Delta t + \frac{1}{2} M_2 \Delta t^2 \\ &= \frac{345.3549^\circ}{360^\circ} + 14.59544429 \times 14.36055804 + \frac{0.00000232}{2} \times 14.36055804^2 \\ &= 210.5582833 (\mathrm{rev}) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，計算された平均近点角 M は，単位 (rev) で与えられているので，これを角度に変換する．そのためには，小数部に 360° をかければよい．したがって，平均近点角 $M = 200.9819819^\circ$ を得る．

求まった平均近点角 M と離心率 e から離心近点角 E が求まる．

$$E - e \sin E = M \tag{6}$$

ニュートン・ラフソン法により，離心近点角を求めると，$E = 200.9785378^\circ$ を得る．

4　地球を中心とする人工衛星の三次元座標計算

離心近点角 E が求まれば，人工衛星の軌道面上の座標 (U, V) は，以下の式で計算できる．

$$U = a \cos E - ae = -6605.13811 (\mathrm{km}) \tag{7}$$

$$V = a\sqrt{1 - e^2} \sin E = -2532.181238 (\mathrm{km}) \tag{8}$$

次に近地点引数 ω，軌道傾斜角 i，昇交点赤経 Ω より三次元直角座標を計算する．この座標系は，地球重心を原点とし，赤道面を x-y 平面，x 軸を春分点の方向，z 軸を北極の方向とする右手系である．近地点引数 ω と昇交点赤経 Ω は，平均運動と同様に人工衛星が非常に地球に近い軌道なので，

日々変化している．その変化は，軌道傾斜角 i と軌道長半径 a と地球の半径 r との比の関数で以下の式で与えられている．

$$\omega = \omega_0 + \frac{180 \times 0.174(2 - 2.5\sin^2 i)}{\pi(\frac{a}{r})^{3.5}}\Delta t = -29.99869264^\circ \tag{9}$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{180 \times 0.174\cos i}{\pi(\frac{a}{r})^{3.5}}\Delta t = 209.3656112^\circ \tag{10}$$

観測時刻における値を求めた後，人工衛星の軌道面上の位置 (U, V) を地球中心の三次元直角座標 (x, y, z) へ変換する．この座標変換には，三次元回転行列を用いる．まず (U, V) を z 軸回りに ω 回転させ，続いて x 軸まわりに i，最後に再度 z 軸回りに Ω 回転させる．これを式で表すと，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6010.950161 \\ 3564.047662 \\ 1098.104593 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

5　観測時刻におけるグリニッジ子午線の赤経計算

先にも述べたが，三次元座標における x 軸は春分点の方向を表している．したがって，人工衛星の位置を緯度と経度で表すためには，観測時刻にグリニッジ子午線がどこを向いているかを赤経で表す必要がある．この赤経の値は角度であるが，360 ° を 24 時間とする時刻で表し，これをグリニッジ恒星時と呼んでいる．なおグリニッジ恒星時は，理科年表や天文年鑑などで調べることができる．地球の自転周期は 23 時間 56 分 4.09053 秒なので，地球は一日あたり 1.002737909 回転 (rev/day) していることになる．ある時刻のグリニッジ恒星時が分かれば，それを回転数 θ_0(rev) で表す．その時刻から観測時刻までの日数 ΔT を求めると，観測時刻のグリニッジ恒星時が回転数の単位 θ_G(rev) で計算できる．

$$\theta_G = \theta_0 + 1.002737909\Delta T \tag{12}$$

天文年鑑によると，2006 年 1 月 1 日 0 時のグリニッジ恒星時は 6 時 38.08 分なので，それを回転数で表すと $\theta_0 = 0.276444444$(rev) となる．観測時刻を 2006 年の 1 月 1 日 0 時 (UT) からの経過日数に直すと，135.0833333 - 1 日なので，上式より回転数で表された観測時刻のグリニッジ恒星時は，$\theta_G = 134.7268858$(rev) と計算される．したがって，観測時刻におけるグリニッジ子午線の赤経は，θ_G の小数部に 360 ° をかければ，角度で表される．計算結果は，$\theta_G = 261.6788848^\circ$ となる．

6　人工衛星の緯度・経度計算

観測時刻におけるグリニッジ子午線の赤経が計算できたので，先に計算した人工衛星の三次元座標を赤道面におけるグリニッジ子午線の方向を x 軸とする座標に変換できる．この変換は，単に z 軸回

りの回転により表すことができる．なお，注意すべきは回転の方向で，座標軸を回転させるので負の向きに回転させなければならない．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_G) & -\sin(-\theta_G) & 0 \\ \sin(-\theta_G) & \cos(-\theta_G) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4396.437109 \\ 5431.877974 \\ 1098.104593 \end{pmatrix} \tag{13}$$

さて，緯度経度と三次元座標との関係は，地球を球形とし，人工衛星の地球重心からの距離を r とすると，以下の通りである．

$$\begin{cases} X = r\cos\phi\cos\lambda \\ Y = r\cos\phi\sin\lambda \\ Z = r\sin\phi \end{cases} \tag{14}$$

したがって，緯度は r と z 座標より計算でき，経度は $\frac{Y}{X} = \tan\lambda$ より計算できる．

$$\phi = \sin^{-1}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \sin^{-1}\frac{1098.104593}{7073.880921} = 8.9303^\circ \tag{15}$$

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{Y}{X} = \tan^{-1}\frac{5506.701512}{-4302.347736} = -51.0141^\circ \tag{16}$$

ここで注意しなければ鳴らないのは，$\tan^{-1}$ の計算結果は，$-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$ の値しか返さないことである．この計算例では，X がマイナス，Y がプラスなので，XY 平面において人工衛星は第二象限にあるはずであるが，結果は第四象限を示している．したがって計算結果に 180 ° をプラスし，$180 - 51.9997 = 128.0003$ が答えとなる．なお， プログラム言語や表計算ソフトには，$\tan^{-1}$ の計算結果を $-\pi\sim\pi$ の値の値で返す関数が用意されている場合が多い．通常 atan2(x, y) という名前で用意されている．これを使えば，象限を考慮することなく計算結果がそのまま利用できる．

最終的に，観測時刻において ALOS は，北緯 8.9303 ° ，東経 128.9859 ° に位置していると導かれた．今回は，地球を球形と見なして計算しているが，地球を回転楕円体として解くこともできるようにしておこう．