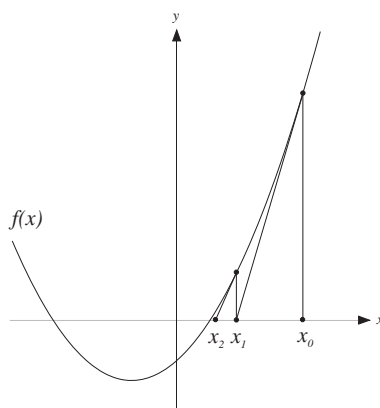


1 非線形方程式の計算

線形な連立一次方程式の解を求めるには、前節で解説したように、逆行列を求めることによって解析的な方法で行えますが、非線形方程式の場合、解を求めるのは非常に難しいです。そこで、近似計算によって解く方法が考案されています。その近似計算の方法は、数々考案されているが、まずは最も簡単で理解しやすいニュートン・ラフソン法 (Newton-Raphson method) について解説します。

非線形関数 $f(x) = 0$ を満たす x を求める場合、まず初期値 $x = x_0$ を設定します。初期値 $x = x_0$ における $f(x)$ 上の点を設定し、この点における $f(x)$ の接線を求めます。この接線が x 軸と交わる $x = x_1$ の値が1回目の近似値となります。この近似値は、まだ精度が悪いので、さらに初期値 $x = x_1$ における $f(x)$ 上の点を設定し、この点における $f(x)$ の接線より2回目の近似値 x_2 を得ます。これを精度が十分高くなるまで繰り返し計算をすれば、近似解が求まります。精度は隣り合う $f(x_i)$ と $f(x_{i+1})$ の値を比較し、その差が十分小さければ精度が高いと言えます。



これを式で表すと、初期値 $x = x_0$ における接線と x 軸と交わる $x = x_1$ は、接線の傾きから以下の式で表すことができます。

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad (1)$$

したがって1回目の近似値 x_1 が計算でき、続いて2回目、3回目と以下のように計算できます。

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $f(x) = x^2 - 5$ において $f(x) = 0$ となる解をニュートン・ラフソン法で解いてみましょう。解析的に解くと解は、 $\sqrt{5}$ と得られますが、その値までは計算できないので、そんなときにニュートン・

ラフソン法が有効です。まず、接線の傾きを求めるために $f(x) = x^2 - 5$ を微分すると $f'(x) = 2x$ が得られます。初期値を $x_0 = 3$ とすれば、近似計算は以下のように計算されます。

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3 - \frac{3^2 - 5}{2 \times 3} = 2.3333333 \\
 x_2 &= 2.3333333 - \frac{2.3333333^2 - 5}{2 \times 2.3333333} = 2.2380952 \\
 x_3 &= 2.2380952 - \frac{2.2380952^2 - 5}{2 \times 2.2380952} = 2.2360689 \\
 x_4 &= 2.2360689 - \frac{2.2360689^2 - 5}{2 \times 2.2360689} = 2.2360680
 \end{aligned} \tag{3}$$

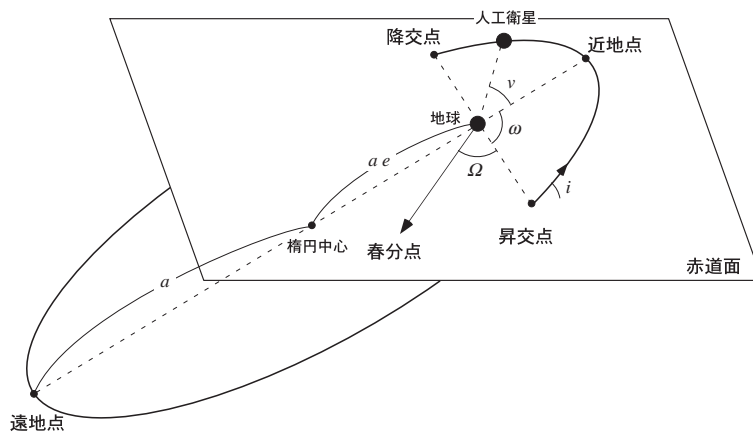
電卓によると $\sqrt{5} = 2.236067977$ なので、4回の近似計算で8桁の精度で計算できており、有効な手法といえます。

近似計算による解法は、初期値を必要としており、適切な初期値を与えなければ近似計算の回数が多くなるだけでなく、計算できない場合も発生します。有効な初期値をどう計算で探すかが重要となります。

2 人工衛星位置推算の基礎

2.1 天体の軌道

天体の軌道は、様々な傾きを持つため、幾つかのパラメータを定義したうえで軌道表現している。太陽の周りを周回する惑星も地球の周りを回る人工衛星も万有引力の法則にそって運動しているので同じと考えて良い。そこで本節においては、人工衛星に焦点を絞り、軌道パラメータを用いて、ある時刻に人工衛星がどこに位置しているかを計算する手法について解説する。下図は、その概念図を表したものである。



幾つかの専門用語があるので、それについてまず解説しておく、人工衛星の軌道は、既に述べたように楕円軌道である。したがって、地球に最も近づく点と最も遠ざかる点がある。最も近づく点を**近地**

点 (perigee), 最も遠ざかる点を**遠地点** (apogee) と呼んでいる。そして, 人工衛星の軌道面は, 地球の赤道面と一致していないため, 角度がついている。そのため, 人工衛星の周回運動においては, 赤道面を2回通過する。このうち, 南から北に横切る点を**昇交点** (ascending node), 北から南に横切る点を**降交点** (descending node) と呼んでいる。下表は, 位置推算に必要な軌道パラメータを表したものである。

表1 軌道パラメータ

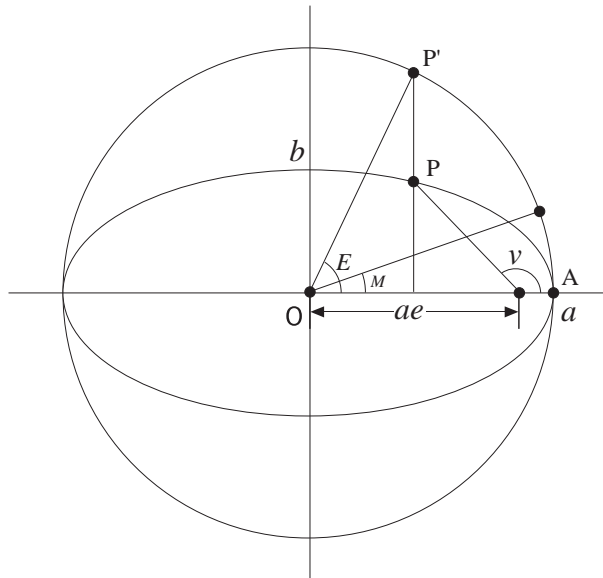
パラメータ	意味	単位
元期 ET	軌道要素を確定した時刻	days
近地点引数 ω	近地点と昇交点のなす角	degree
軌道傾斜角 i	人工衛星の軌道面と赤道面とのなす角度	degree
昇交点赤経 Ω	春分点と昇交点のなす角度	degree
離心率 e	楕円の形を表す数値	無次元
平均近点角 M_0	元期における人工衛星の位置を表す角度	degree
平均運動 M_1	人工衛星の一日あたりの周回数	rev/day
平均運動変化係数 M_2	平均運動の変化割合	rev/day ²

2.2 軌道面上の位置

2.2.1 軌道長半径の計算

軌道面上の位置を求めるには, まず楕円軌道の形を決定する軌道長半径 a と離心率 e が必要となる。楕円軌道における実際の衛星の位置 $P(x_p, y_p)$ は, P を円軌道に投影した P' の位置, つまり, $\angle AOP'$ がわかれば計算できる。 $\angle AOP'$ は先にも述べたが, 離心近点角 E である。

$$\begin{cases} x_p = a \cos E \\ y_p = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \end{cases} \quad (4)$$



離心近点角 E は、ケプラーの第2法則により求めることができるが、その前に軌道長半径 a を計算する必要がある。公転周期 T が分かれば、次式のケプラーの第3法則により、軌道長半径 a を計算できる。

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (5)$$

なお、係数 GM は、地球周回軌道の人工衛星の場合、次の値となっている。

$$\begin{aligned} GM &= 3.986005 \times 10^{14} (\text{m}^3/\text{s}^2) \\ &= 2.975537 \times 10^{15} (\text{km}^3/\text{day}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

2.2.2 ニュートンラフソン法による離心近点角 E の計算

次にケプラーの第2法則により E を求める。次式はその第2法則を式で表したものである。

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t = M \quad (7)$$

ケプラーの第2法則において、人工衛星が最も地球に近づく位置（近地点 A ）を $t = 0$ とすると、そのときの通過時刻が分かれば、任意の時刻における軌道面上の衛星の位置を計算することができる。

また、ケプラーの第2法則の右辺の平均近点角 M は、人工衛星が円軌道を描くときの軌道上の位置とみなすことができ、それと対応する時刻の楕円軌道上の位置を離心近点角 E で表すことができる。したがって、ある時刻における M の値が分かれば、任意の時刻における軌道面上の衛星の位置を計算することができる。

彗星などの放物軌道や細長い楕円軌道の場合は、近地点通過時刻が与えられる場合が多く、人工衛星などの円軌道に近い楕円軌道の場合は、ある時刻における平均近点角が与えられる場合が多い。

実際に軌道面上の位置を求めるには、ある時刻における平均近点角 M が与えられ、求めたい時刻の離心近点角 E を計算するわけであるが、ケプラーの第2法則の式は非線形方程式のために単純に解を求めることはできず、近似計算によって解を求めなければならない。

近似計算の方法は、数々考案されているが、最も簡単に解けるニュートン・ラフソン法を用いることが出来る。この方法については、既に解説した。このニュートン・ラフソン法を用いてケプラーの第2法則を解くが、このとき関数は次式で与えられる。

$$f(E) = M - E + e \sin E \quad (8)$$

この関数 $f(E) = 0$ を満たす E を求めることになる。そのためには、まず初期値 E_0 を設定し、接線を求めるが、この接線の傾きは、関数 $f(E)$ を微分することによって求まる。

$$f'(E) = e \cos E - 1 \quad (9)$$

近似解 E_1 は、 E_0 から解に ΔE_0 だけ近づく。その近づく量は、接線の傾き $f'(E_0)$ より次式にて求まる。

$$f'(E_0) = \frac{f(E_0)}{\Delta E_0} \quad (10)$$

したがって ΔE_0 が求まるので、 $E_1 = E_0 - \Delta E_0$ を計算し、次の近似解を求める。この近似解を求めて行くための各 ΔE の計算は、以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} \\ \Delta E_1 &= \frac{f(E_0 - \Delta E_0)}{f'(E_0 - \Delta E_0)} \\ \Delta E_2 &= \frac{f(E_0 - \Delta E_0 - \Delta E_1)}{f'(E_0 - \Delta E_0 - \Delta E_1)} \end{aligned} \quad (11)$$

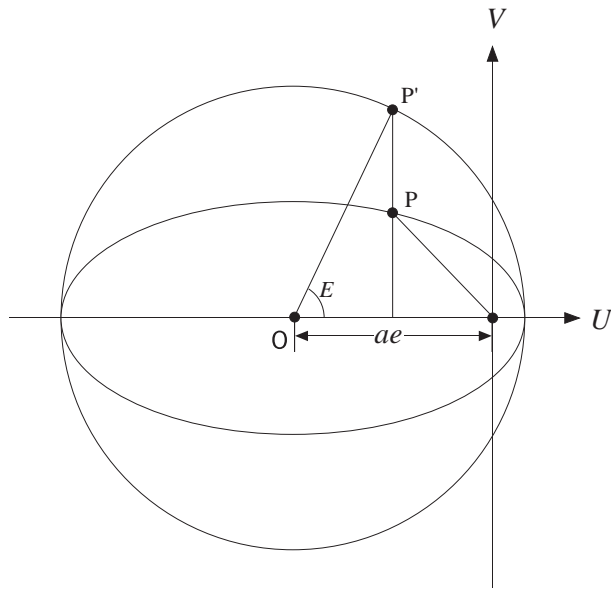
これにより E を求め、人工衛星の軌道上の座標が計算できる。

2.2.3 軌道面上座標の計算

人工衛星の軌道面上の座標 (U, V) は、離心近点角 E が求めれば、簡単に計算できる。座標の原点が、楕円の中心に位置し、軌道長半径に沿って U 軸方向、短半径に沿って V 軸方向を設定すれば、以下の式を得る。

$$\begin{cases} U = a \cos E \\ V = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \quad (12)$$

しかし、以下の図のように地球の中心を原点とする座標系の方が、地球から見た人工衛星の位置を決定するには都合が良い。



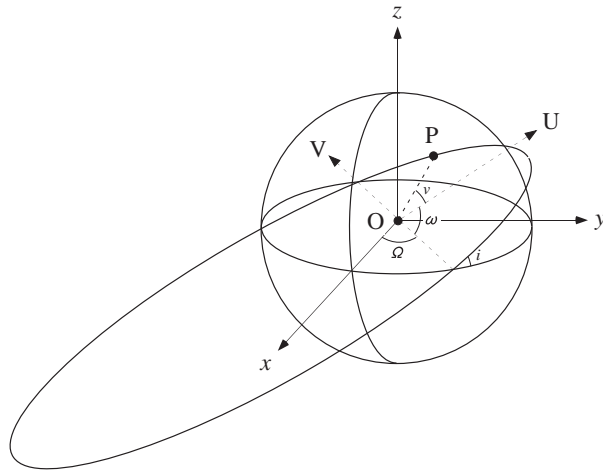
この座標系において人工衛星の軌道面上の座標 (U, V) は、以下ようになる。

$$\begin{cases} U = a \cos E - ae \\ V = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases} \quad (13)$$

2.3 地球中心を原点とする三次元座標

人工衛星の軌道面上の座標 (U, V) は、離心近点角 E が求めれば、次に地球中心を原点とする三次元座標を計算する。この計算のためには、地球と人工衛星の軌道との関係を決定するパラメータが必要となる。そのリストを以下に示す。

- 近地点引数 ω (Argument of perigee) : 軌道面の平面 UV における軌道の傾きと言える。つまり、平面 UV に対して、鉛直方向の W 軸を考えたときの W 軸回りの回転角と言える。
- 軌道傾斜角 i (inclination angle) : 地球の赤道面に対する軌道面の傾きを表す。軌道傾斜角が 0° のときは赤道軌道、軌道傾斜角が 90° のときは極軌道である。この角度は、地球中心の三次元直角座標を考えた場合、x 軸回りの回転と言える。
- 昇交点赤経 Ω (right ascension of ascending node) : 人工衛星が地球の赤道面を横切る昇交点の位置を赤経で表したものである。この角度は、地球中心の三次元直角座標を考えた場合、z 軸回りの回転と言える。



これらのパラメータより，人工衛星の軌道面上の位置 (U, V) を地球中心の三次元直角座標 (x, y, z) へ変換することができる．この変換には，三次元回転行列を用いる．まず (U, V) を z 軸回りに ω 回転させ，続いて x 軸まわりに i ，最後に再度 z 軸回りに Ω 回転させる．これを式で表すと，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

3 地球観測衛星の軌道

人工衛星は，観測対象によって特徴のある軌道により運用されている．ここでは，観測対象と軌道について解説する．

3.1 赤道軌道と極軌道

まず，軌道傾斜角によって軌道を分類すると，下図に示すように，**赤道軌道** (equatorial orbit)，**傾斜軌道** (inclined orbit)，**極軌道** (polar orbit) とに分類できる．赤道軌道は，軌道傾斜角がほぼ 0° であり，極軌道の場合は軌道傾斜角がほぼ 90° である．

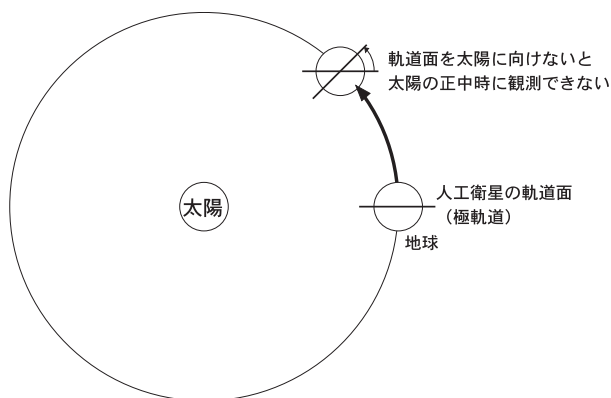


地球観測衛星の多くは、極軌道か傾斜軌道で運用されている。極軌道であれば、地球自身が自転していることを利用して、全球を観測することができるからである。地球観測衛星の高度は、約 450～800km で、地球の半径が約 6370km であることを考えれば、非常に地球に近い軌道で運用されている。この高度であれば、比較的小さな望遠鏡でも高分解能で観測できるという利点もある。レンズの分解能から試算すると、600km の高さから 1m 程度の分解能を得るには、口径 40cm の望遠鏡で十分である。ところで、この高度での軌道周期は、ケプラーの第三法則によると約 1.6 時間である。ある場所を観測して、1.6 時間後に人工衛星が帰って来たとき、その場所は自転により移動しているため、別の場所を観測することになる。同じところを連続して観測する回帰周期となると、衛星センサの仕様にもよるが、1 週間以上にもなるものがある。したがって、極軌道の地球観測衛星で即時対応の観測を行うためには、1 機での運用ではなく、数機体制での運用が必要となる。防衛省が、高分解能の偵察衛星を運用しているが、1 機では不十分のために 2007 年現在は 2 機体制で運用しているのは、即時対応のためである。

赤道軌道で低い高度の場合、赤道付近しか観測できないという欠点がある。しかし、静止軌道と呼ばれる軌道は、赤道軌道となっている。静止軌道は、地球の自転周期と人工衛星の軌道周期とが一致する軌道で、これもケプラーの第三法則によって計算すると、高度は約 36000km の彼方となる。この軌道周期で赤道軌道で運用すると、地上から見た人工衛星飲みかけの位置は、常に同じところになり、静止しているように見える。この軌道は、ある場所から常に同じ位置に見えているため、通信や放送に積極的に利用されている。また、常時観測も可能である。ただ、非常に遠い軌道のために低分解能での観測となるが、気象衛星として利用されている。気象衛星「ひまわり」や BS 衛星、CS 衛星は、我々にとって身近な衛星であり、全て静止軌道である。

3.2 太陽同期軌道

地球観測衛星は、極軌道で運用されていると解説したが、完璧な極軌道ではない。この理由について解説する。基本的に衛星の軌道面の傾きは、地球が公転したとしても同じ向きを保つ。したがって、下図に示している通り、ある時点で軌道面が太陽を向いた状態であっても、公転により太陽を向かなくなってしまう。



地球観測衛星の場合、軌道面は常に太陽を向いた状態の方が好ましい。太陽の正中する時刻に常に観測すると、観測点では太陽高度が高いために、観測に有利だからである。夕方観測されると、太陽高度が低く、影が多い画像になるばかりでなく、地表面の輝度も低い値になってしまう。したがって、常に太陽の方向を向くような工夫が必要である。つまり、昇交点赤経 Ω を太陽を向くように常に変化させなければならない。軌道の傾きを変化させるためには、ロケットにより強制的に変化させることもできるが、ロケット燃料が尽きると運用できなくなるため、困難である。この問題に対して、人工衛星の軌道が不安定であることを逆に利用して解決することができる。

前節でも述べたように、低高度の人工衛星は、地球が回転楕円体に近いために軌道が安定していない。特に平均運動 M_0 、昇交点赤経 Ω 、近地点引数 ω が常に変化する。この変化量は、軌道傾斜角に依存している。赤道軌道は、地球表面と人工衛星との距離がほぼ同じため、重力がほぼ一定なので、軌道は比較的安定している。しかし、傾斜軌道になると、地球表面と人工衛星との距離が変化するために安定した軌道にならないのである。これを利用して昇交点赤経 Ω の変化が、太陽の方向を常に向くような軌道傾斜角を探す必要がある。前節で計算した ALOS 衛星の場合、軌道傾斜角 i が約 98° であれば、昇交点赤経 Ω の変化が、ちょうど太陽を向き続ける軌道となっている。

常に太陽の方向を向くような軌道は、**太陽同期軌道** (sun synchronous orbit) と呼ばれ、地球観測衛星においては、極めて重要な軌道である。その太陽同期軌道を地球が回転楕円体であることによる軌道の不安定さを利用して実現している。科学技術の奥深さに驚くばかりである。