

1 力学基礎

人工衛星を用いて測る場合、人工衛星の位置を推算することが第一に重要となる。その後は画像計測の延長線上にあると言える。そこで本節では人工衛星の位置推算において基礎となる力学について解説する。

1.1 運動の法則

静止している物体に力を加えると、運動したり、変形したりする。物体の運動のみについて考えるため、ひとまず変形しないものを扱えば、加わった力は全て運動のために働く。つまり力によって速度が与えられ、変化する。**速度** (velocity) とは、単位時間あたりの距離の変化量である。そして、速度の時間的な変化は、加速すると表現している。**加速度** (acceleration) とは、単位時間あたりの速度の変化量である。したがって、速度 v は距離の変化量 x を時間 t で微分したものと定義され、加速度 α は速度 v を時間 t で微分したものと定義できる。

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ある一定の速度で運動している物体は、力が加わらない限り速度の変化はない。その速度で動き続けようとする。これを**慣性の法則** (law of inertia) と呼んでいる。慣性の法則は、ニュートンが運動の法則として挙げている3つの法則のうちの第一法則である。1687年にニュートンが発表したプリンキピアという書物に、この運動の法則についても記されている。

ある一定の速度 v_0 で直線上に進んでいる物体があるとする。いわゆる**等速運動** (uniform motion) である。時刻 $t = 0$ において物体が x_0 を通過したとき、ある時刻 t における物体の位置 x は、 t の関数で次式のように表すことができる。

$$x = v_0 t + x_0 \quad (3)$$

もともと速度とは、単位時間あたりの位置の変化なので、距離の変化量を時間で微分することで得られた。したがって、逆に移動後の位置を求めるには、速度 v_0 について、 t で積分すれば良いこととなり、上式となるわけである。

次に速度が変化するような加速度運動を考える。速度の変化が時間的に一定のときは、加速度が一定で、いわゆる**等加速度運動** (uniform accelerated motion) となる。ある一定の加速度 α で直線上に進んでいる物体があるとする。時刻 $t = 0$ において物体の速度が v_0 のとき、ある時刻 t における物体の速度 v は、 t の関数で次式のように表すことができる。

$$v = \alpha t + v_0 \quad (4)$$

時刻 $t = 0$ において物体が x_0 を通過したとき、ある時刻 t における物体の位置 x は、上式を t で積分した関数で次式のように表すことができる。

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad (5)$$

さて、以上のことを踏まえて、ボールを投げたときの軌跡について考えてみる。ボールを投げるとき、ボールが加速を受けるのは、振りかぶってボールが手から離れるまでの瞬間である。その後ボールは慣性の法則に従って等速運動をしようとするが、**重力** (gravity) の作用によって落下する（ここでは、空気抵抗は無視することとする）。重力は地球の中心に向かって物体を引っ張る力で、引力とも呼ばれている。したがって重力は、速度を変化させているので、立派に力といえる。そして重力は、地表においてはほぼ一定なので、ボールに対して下向きの加速度を常にもたらす。例えば、斜め上にボールを投げたとすると、手から離れた瞬間のボールの速度 v_0 は、ベクトルで水平方向の x 成分と鉛直方向の y 成分に分解することができる。投げ上げる角度を x 軸から角度 θ で表すと、それぞれの速度成分は、次式で表すことができる。

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

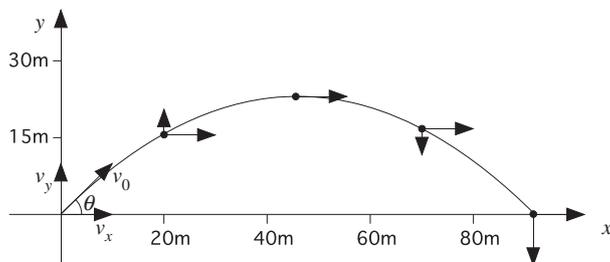
x 成分については、慣性の法則に従い、そのままの速度を保つが、 y 成分については、重力が下向きに働く。したがって y 成分の速度は、時間とともに変化する。**重力加速度** (gravitational acceleration) の値を g としたとき、向きは下向きなので、それぞれの速度成分は、次式で表すことができる。

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = -gt + v_0 \sin \theta \end{cases} \quad (7)$$

この式は、数学でいえば t を媒介変数として表している連立方程式である。ボールの位置は、上式を t で積分すればよいので、次式で表すことができる。なお、原点は手を離れた瞬間の位置としている。

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

下のグラフは、 $v_0 = 30 \text{ m/s}$ (108 km/h)、 $\theta = 45^\circ$ のときのボールの奇跡を上式に従って描いたものである。グラフにおける矢印は、各点における速度の成分を示した。なお、重力加速度 g の値は、 9.8 m/s^2 を利用したが、重力加速度については、万有引力の法則の項でさらに解説する。



このグラフより、放物線を描き、飛距離は約 90m であることが解る。

さて、次に力について解説する。**力と運動の法則** (law of motion) が、ニュートンの運動の法則においては第二法則として記されている。物体の質量を m 、それを動かすときの加速度を α とすると、**力** (force) F は、次式で表される。

$$F = m\alpha \quad (9)$$

力は質量と加速度のかけ算で表している。同じ加速度で動かすのに、質量の大きいものは大きな力が必要であることを示している。力の単位としては N (ニュートン) が利用されている。質量が 1kg の物体に 1m/s^2 の加速度を与える力を 1N としている。ところで、力と加速度は、それぞれ向きと大きさを持つので、ベクトルで表現し、 $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ とも表現できる。

ここで**質量** (mass) とは、重さに関わる本質的な量と考えれば解りやすい。重さは、質量に比例する。人間が感じる重さは、重力や浮力の作用によって、同じ物体であっても異なる。5kg の鉄アレイでも、水の中では軽く感じるし、さらに重力の小さい宇宙ステーションの中では極めて軽く持ち上げることができる。したがって、力の作用によって重さが変わってくる。重力によって変わることはない物体の量が質量である。バネばかりは、重力の作用を利用した重さを測る道具である。したがって重力の異なる場においては、値が異なる。天秤ばかりは、分銅等の測る基準と比べることによって得られる値なので、重力の作用によらず、相対的な量の違いを測ることができ、質量を測る上では重要な機器である。

運動の法則において第三法則は、**作用・反作用の法則** (law of action and reaction) である。ある物体に力を与えた場合、その物体からも力を返し、その大きさは等しいというものである。A から B に与えた力を \mathbf{F}_a 、B から A に返って来た力を \mathbf{F}_b とすると、次式で表すことができる。

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = 0 \quad (10)$$

力は、ベクトルで表現しており、 \mathbf{F}_a と \mathbf{F}_b は、逆向きであるため、その和はゼロとなる。これは、運動量の保存則を示している。

運動量 (momentum) \mathbf{p} は、次式のように質量 m と速度 \mathbf{v} の積によって表現される。

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (11)$$

この運動量と力との関係を見ると、 $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ で、速度 \mathbf{v} を時間 t で微分したものが加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ であるから、次のように表すことができる。

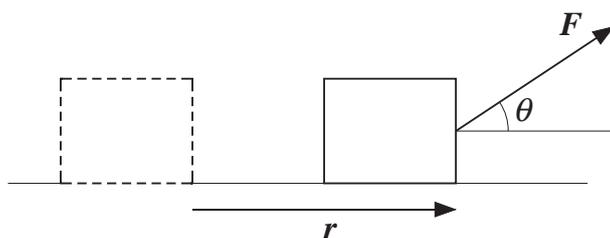
$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (12)$$

つまり、運動量を時間で微分したものが力であるといえる。運動量が増えるということは、力が働いているということである。この運動量が保存されるということを考える場合、例えば速度が一定の場合、その運動量も一定で、 $\mathbf{F} = 0$ となる。したがって、力を与えられない限り速度は一定を保つこととなり、慣性の法則を表している。

物体に力を与えて、どれだけの距離を動かしたかで仕事量が求まる。**仕事** (work) W は、力 \mathbf{F} と移動距離 \mathbf{r} との積で次式のように表すことができる。

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (13)$$

ここで積というのは、内積を表している。下図は、ある物体を力 \mathbf{F} によって移動させた図を描いている。



力の方向と移動距離の方向とが異なる場合、内積で表すと $|\mathbf{F}||\mathbf{r}|\cos\theta$ となり、矛盾はない。しかも仕事は、方向を持たないスカラー量となる。仕事の単位は J (ジュール) であり、1J は 1N の力で 1m 移動させる仕事量としている。また仕事には時間がかかるが、単位時間あたりの仕事を**仕事率** (power) と呼んでいる。仕事率の単位は W (ワット) であり、1W は 1 秒間あたり 1J の仕事率としている。

仕事によって、物体にエネルギーが蓄えられることがある。エネルギーの定義は、様々なものがあるのできちんとした表現は困難であるが、重力が下向きに働いている場において、物体を上を移動させる仕事をするとき、その仕事量は物体に**位置エネルギー** (potential energy) として蓄えられる。つまり、エネルギーの単位は仕事の単位 J と同じと見なせる。そして手を離せば、物体は落下し始める。その後、物体は速度を増し、元の位置に達したとき、蓄えられたエネルギーは、全て**運動エネルギー** (kinetic energy) に変換されている。

ここで、運動エネルギーについて考える。仕事量は、式 13 で与えられていた。仕事量は、力を移動距離で積分したものといえる。したがって、運動の方程式である $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha}$ を用いて、移動距離 r で積分すると、以下ようになる。

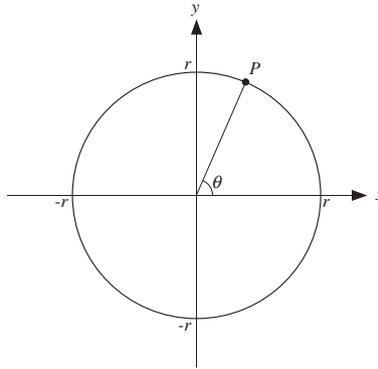
$$\begin{aligned}
 W &= \int m\boldsymbol{\alpha}dr \\
 &= \int m\frac{d\mathbf{v}}{dt}dr && \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \text{ より} \\
 &= \int m\mathbf{v}d\mathbf{v} \\
 &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

なお、 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ であり、スカラー量となる。

位置エネルギーと運動エネルギーとの和は、**力学的エネルギー** (mechanical energy) と呼ばれている。この力学的エネルギーは常に一定になろうとする性質を持っている。

1.2 円運動

下図のように原点を中心とし、半径 r の円周上を周回している物体 P を考える。



このとき、P の座標は、半径 r と角度 θ を用いて次式で計算することができる。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

この物体が等速円運動をしているとき、単位時間あたりに進む角度が一定である。そこで角速度を定義し、利用する。**角速度** (angular velocity) ω とは、単位時間 t あたりの角度 θ の変化量のことであり、次式で表すことができる。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (16)$$

この角速度 ω が一定であれば、角度は $\theta = \omega t$ となる。したがって、等速円運動をしている物体の座標は、次式で表現することができる。

$$\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases} \quad (17)$$

円周上の位置の変化量は、角度がラジアン単位であれば、 $r\theta$ となる。よって速度 v は次式で計算できる。

$$v = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad (18)$$

一方、これを成分で表すと、各成分での位置の変化量を時間で微分すれば良いので、次式となる。

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t = -\omega y \\ v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t = \omega x \end{cases} \quad (19)$$

ここで、成分に分解されている速度を合成し、大きさを求めると、以下のようになる。

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{(-y)^2 + x^2} = r\omega \quad (20)$$

したがって、矛盾はない。

さらに加速度は、速度の変化量を時間で微分して、次式を得る。

$$\begin{cases} \alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x \\ \alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \end{cases} \quad (21)$$

これをベクトルで表現すると、次式を得る。

$$\mathbf{a} = -r\omega^2 \quad (22)$$

等速円運動をしている物体は、周期的に同じ位置を通過する。ある点を通過し、再びその点を通過するまでの時間を**周期** (period) とよぶ。周期の単位は、一般に時刻の単位が使われる。周期 T は、角速度 ω より求めることができる。回転により移動した角度 θ は、 ωt より計算でき、この角度が 2π となる t を求めれば良いので次式を得る。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (23)$$

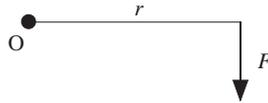
周期は、一周に要した時間であるのに対して、一定時間に何回周回したかを表すこともあり、これを**振動数** (frequency) と呼んでいる。1秒あたりの周回数は、Hz (ヘルツ) という単位で表現している。振動数 ν と周期 T との関係は、逆数の関係にあり、次式で表現される。

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (24)$$

角速度や周期、振動数等のパラメータは、回転運動だけでなく振動する現象においても使われる重要なものである。

1.3 角運動量

回転させる力は、**モーメント** (moment) や**トルク** (torque) と呼ばれている。例えば、下図のように O から離れた所に力 F がかかっている状態を示している。

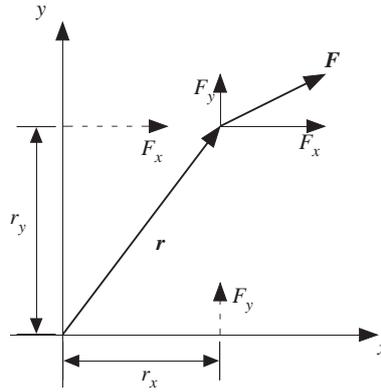


点 O の周りのモーメント N は、 O からの距離 r とそれに直角方向の力 F との積によって計算することができる。

$$N = rF \quad (25)$$

同じ力でも r が大きくなれば、大きなモーメントを与えることを意味している。例えば、栓抜きの手柄の長さは、長いほど小さな力で栓を抜くことができるが、これこそモーメントの実例である。

次に、力が直角でなく、斜めに働いているときはどうなるかを考えてみる。下図は、その状態を表したもので、ベクトルで表された r の位置に斜め向きの力 F がかかっており、その力もベクトルで表現されている。



このとき、原点を中心とするモーメントは、 \mathbf{F} を x 成分と y 成分に分解し、それぞれの軸上でのモーメントを考えれば良い。 x 軸上の r_x においては、 F_y の力が上向きに働いており、 y 軸上の r_y においては、 F_x の力が右向きに働いている。 第三章の三次元回転行列で示したように、回転の方向は左回りが正なので、 x 軸におけるモーメントは $r_x F_y$ となり、 y 軸におけるモーメントは $-r_y F_x$ となる。 したがって、原点周りのモーメントの合計は、次のようになる。

$$N = r_x F_y - r_y F_x \quad (26)$$

この式は、ベクトルの外積と同じ計算である。 再度、式??を確認してほしい。 改めて外積を用いてモーメントを表現すると、次のようになる。

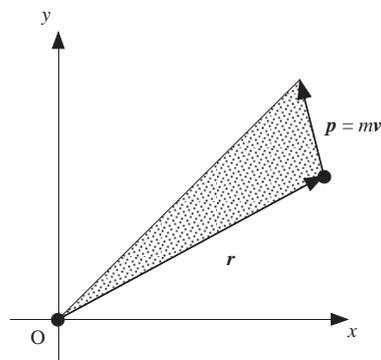
$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (27)$$

三次元空間においても成り立つので、非常に便利である。

運動量は、 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ で表した。 角運動量 (angular momentum) は、運動量 \mathbf{p} と位置ベクトル \mathbf{r} との外積で定義される。 したがって、角運動量 \mathbf{L} は次式で表される。

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (28)$$

下図は、角運動量の概念を示したもので、ある方向に等速直線運動をしている物体を考えたとき、角運動量の大きさは、運動量 \mathbf{p} と位置ベクトル \mathbf{r} とが作る面積に等しい。



この物体がどんどん進んで行ったとしても、単位時間あたりの外積の大きさは変わらないので、角運動量が保存されていると言える。等速円運動においても常に一定の角運動量で運動しており、やはり角運動量は保存されている。

さて、角運動量を表す式に着目する。質量を m 、速度を v とすると、運動量 $p = mv$ である。そして、速度 v を角速度 ω と半径 r を用いれば、 $v = \omega r$ である。したがって、角運動量は、次式のように表すことができる。

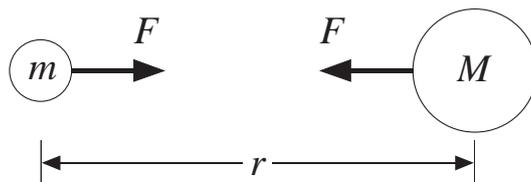
$$\begin{aligned} L &= mvr \\ &= mr^2\omega \end{aligned} \tag{29}$$

運動量は速度かける質量で、角運動量は、角速度かける mr^2 といえる。この mr^2 を**慣性モーメント** (moment of inertia) と呼び I で表す。慣性モーメントは、回転のしやすさを表す指標となる。

この慣性モーメントは、構造力学でいう**断面二次モーメント** (geometrical moment of inertia) に相当する。断面二次モーメントの場合は、ある断面において質量を面積で表したものにすぎない。

1.4 万有引力の法則

ニュートンは、1687年「プリンキピア」において万有引力の法則を解説している。惑星や衛星の運動が、直線運動ではなく、太陽に引き寄せられるようになりながら円錐曲線の軌道を保って運動していること等から、引力の存在を導いた。惑星と太陽、木星の衛星と木星、月と地球等の2つの物体の間には、引っ張る力が及ぼし合っている。そしてその引力は、2つの物体間の距離の二乗に反比例するというものである。



上図において、2つの物体の質量を m, M 、物体間の距離を r とすると、引っ張り合う力は、次式で表される。これが、万有引力を表す式である。

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \tag{30}$$

ここで G は万有引力定数であり、一定の値とされている。一般に次の値が用いられている。

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$$

この式 30 において、太陽の周りを回る惑星の運動に適用するため、太陽の質量 M を入力するが、その値を入力したときの GM も定数となり、日心重力定数 G_s と呼ばれている。地球の周りを回る衛星の運動においても同様で、その定数は地心重力定数 G_e と呼ばれている。それぞれの値は、以下の通

りである。(天文年鑑より)。

$$G_s = 1.32712438 \times 10^{20} \text{m}^3/\text{s}^2$$

$$G_e = 3.986005 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$$

運動の法則である $F = ma$ との関係を考えて、万有引力の法則における加速度の項は、 $G\frac{M}{r^2}$ となる。したがって、地球の中心から地球表面までの距離、つまり地球の半径の値を入力すれば、地表での重力加速度 g が求まる。例えば、地球の赤道半径として 6378140m を入力すると、 $g = 9.79827\text{m}/\text{s}^2$ となり、高校での物理の授業で利用した重力加速度である $9.8\text{m}/\text{s}^2$ に一致する。

ところで、初めて万有引力定数が求まったのは、万有引力の法則の発見から 100 年余り後の 18 世紀の終わりのことである。1798 年にキャベンディッシュ (Cavendish) が 2 つの錘の引力を測ることに成功したことから、後年に万有引力定数が導かれた。それまで地球の質量は求められていなかったが、万有引力定数が求まったことで、地球の半径、重力加速度より、地球の質量を求めることが可能となった。

太陽の質量についても同様で、地球の公転周期から円運動での加速度が求まり、太陽と地球の距離が解れば、太陽の質量も求まる。ただ、太陽と地球との距離は、非常に遠いために直接測ることは困難である。地球の半径分の長さの基線を使って三角測量により間接的に測るにしても視差は、 0.00243° と僅かのため、十分な精度で測ることは困難である。精度の高い測量機器で、 0.000278 程度の精度なので、これを用いて測ったとしても $1/10$ の精度でしか測ることができない。太陽と地球との距離は困難であるが、火星であれば大接近時に比較的近い距離を通過するので三角測量によりそれを測ることは可能である。地球と火星との距離の計測に成功したのはカッシーニ (Cassini) で、フランスのパリとギアナのカイエンヌとを基線として三角測量により求めた。1672 年のことである。この測量において重要なのは、火星は動いているため、パリとギアナから同時に観測する必要がある。電話もなく正確な時計もなかった当時の同期観測には、木星の衛星が利用されていた。木星の衛星のうち、4 つは非常に大きく、比較的小さな望遠鏡でも見ることができる。したがって、4 つの衛星の運動を観測することができ、その運動の状況を時計代わりに利用するのである。これにより地球と火星までの距離を測ったと言われている。

当時、次節で解説するケプラーの法則により、太陽と惑星との距離は、相対的な値は求まっていた。現在でも太陽と地球との距離を 1A.U. (天文単位) で表すことが多い。カッシーニにより、地球と火星との距離が求まったことで、それを絶対値で表すことができ、太陽と地球との距離も間接的であるが求めることができたのである。太陽と地球との距離が求まったことで、万有引力の法則を用いて、太陽の質量を始め各惑星の質量も求まった。現在でも太陽と地球との距離は、直接測っていない。レーザーを用いて金星までの距離を精密に測り、それをもとに太陽と地球との距離を求めている。

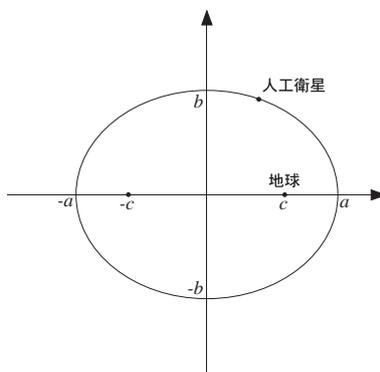
2 ケプラーの法則

太陽の周りを運動する惑星、地球の周りを運動する衛星は、何れも**ケプラーの法則** (Kepler's laws) に則っている。1619 年にケプラーは、火星と地球と太陽の見かけの動きから、惑星の運行に関する三つの重要な法則を発表した。その後ニュートンは、1687 年「プリンキピア」において万有引力の法則

を用いてケプラーの法則を理論的に説明している。ここでは、そのケプラーの法則について、人工衛星の運動を例に万有引力の法則を用いながら解説する。

2.1 ケプラーの第一法則

地球を周回する人工衛星は、**楕円軌道** (elliptic orbit) を描き、地球の重心は、楕円軌道の一つの焦点に位置する。これがケプラーの第一法則である。楕円軌道の長半径は a 、離心率は e で表す。



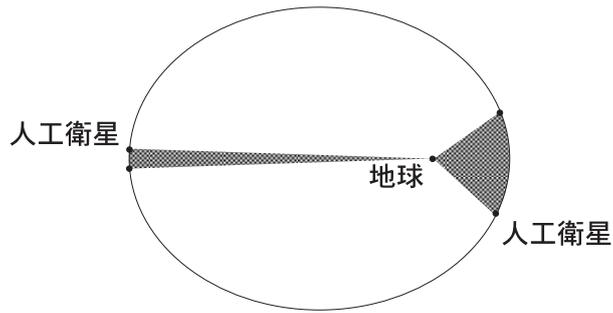
太陽の周りを回る惑星も同様である。この法則が発見されるまで、惑星は円運動していると考えられていた。しかし、円運動として惑星の軌道を決定し、地球から見る惑星の位置を予測したとしても誤差が発生してしまうため、天動説を完全に覆すことは出来なかった。ところが、ケプラーがこの法則を発見してから、非常に正確に惑星の位置を計算できるようになったのである。

2.2 ケプラーの第二法則

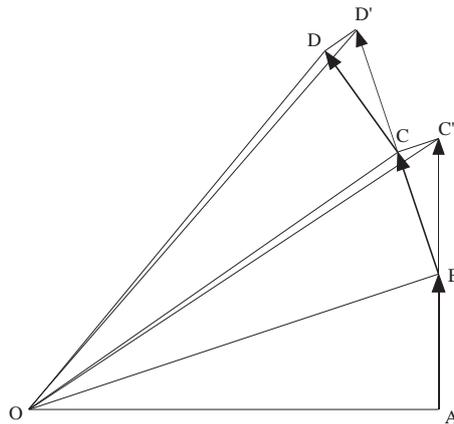
人工衛星が円軌道を描く場合は、その運動は**等速円運動** (uniform circular motion) となる。ところが、楕円軌道を描くときは、ケプラーの第1法則より、地球の重心が楕円軌道の一つの焦点に位置するため、軌道上の場所によって重力の大きさが変化する。重力 F は、ニュートンの**万有引力の法則** (laws of gravity) により、以下の式で与えられていた。

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (31)$$

ここで G は万有引力定数、 M は地球の質量、 m は人工衛星の質量、 r は人工衛星と地球との距離である。この式より重力は、地球に近いとき大きく、遠いとき小さくなる。そして、角運動量保存則からみても、地球と人工衛星の経路から描ける面積が単位時間あたり一定という**面積速度一定** (areal velocity) のケプラーの第二法則が導かれる。下図はその様子を図に示したものである。塗りつぶされた部分の面積は同じとなるように描いている。このように人工衛星は、単位時間あたり地球と人工衛星の描く軌道とで描かれる面積が同じで、地球に近いほど速度が速く、地球から遠いほど速度が遅いことになる。

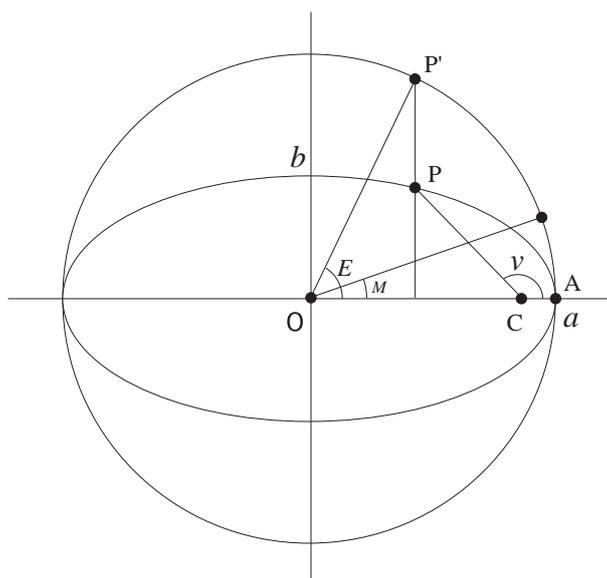


角運動量保存則を適用すると、この面積速度一定は既に導かれているが、ここでは、図解的に面積速度一定について解説する。下図において点 O は地球の位置を表し、人工衛星が A, B, C, D と通過して行く様子が描かれている。



人工衛星が地球の重力の影響を受けない場合は、A から B を通過後もまっすぐ進み、C' に向かう。このとき重力を受けない場合でも点 O において描かれる面積速度 $\triangle OAB$ と $\triangle OBC'$ は等しい。点 O と直線 AB, BC' との垂直距離は変わらないからである。ここで、地球の重力を考慮してみる。点 B において重力により C' から C に引き戻されたと考えて良い。このとき、引き戻される方向は、点 B において点 O に向かう方向である。したがって、OB と CC' は平行であるから、 $\triangle OBC'$ と $\triangle OBC$ も等しい、これは、点 D に向かう時も同様である。したがって、面積速度一定と見なされる。

それでは、ケプラーの第 2 法則を式で表してみよう。そのためには、下図において人工衛星が A から P へ動く面積 CAP を求めなければならない。



衛星の位置を円軌道に投影した P' を考え、その角度を E (ラジアン) とおくと、扇型面積 OAP' は以下の式で求められる。

$$OAP' = \pi a^2 \frac{E}{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 E \quad (32)$$

楕円の扇型面積 OAP は扇形面積 OAP' の $\frac{b}{a}$ なので、楕円の扇形面積 OAP は以下の式となる。

$$OAP = \pi a^2 \frac{E}{2\pi} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} abE \quad (33)$$

したがって、地球を中心とする楕円の扇形面積 CAP は、楕円の扇形面積 OAP から三角形 OCP を引けば求まる。 OC の距離は離心率 e を用いると ae なので、

$$CAP = \frac{1}{2} abE - \frac{1}{2} aeb \sin E = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E) \quad (34)$$

この扇形面積 CAP が単位時間あたり一定なので、人工衛星の公転周期を T 、 A から P へ移動するのに要した時間を t とすると、楕円軌道の面積と公転周期を分母にすると、以下の式を得る。

$$\frac{\frac{1}{2} ab(E - e \sin E)}{\pi ab} = \frac{t}{T} \quad (35)$$

この式を整理すると、

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t \quad (36)$$

ここで、 E は**離心近点角** (eccentric anomaly) と呼ばれている。また $\frac{2\pi}{T} t$ は角度を意味し、**平均近点角** M (mean anomaly) と呼ばれている。この平均近点角 M は、人工衛星が円軌道を描くときの位置と見なすことができる。したがってこの式は、半径 a の円軌道を描く人工衛星の公転周期と長半径が a の楕円軌道を描く人工衛星の公転周期は同じであることを示している。

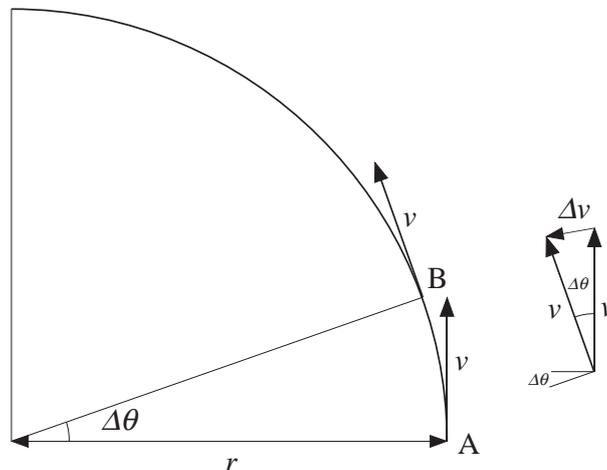
2.3 ケプラーの第三法則

ケプラーの第三法則は、軌道半径と周期との関係に関するものである。円軌道を考えた場合、軌道半径 r の人工衛星のスピード v は、公転周期を T 、振動数を ν 、角速度を ω とすると以下の式で表される。

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = r\omega \quad (37)$$

なお、**振動数** (frequency) とは単位時間あたりの公転回数であり、 $T = 1/\nu$ である。また、**角速度** (angular velocity) は単位時間あたりの角度 (ラジアン) である。

次に**等速円運動** (uniform circular motion) における加速度 α を求める。既に等速円運動の加速度については求めたが、ここでは図解的に求める。まず重力がなければ、慣性の法則に従い天体は**等速直線運動** (uniform motion) となるが、円運動の場合、速度が一定であっても速度の方向が変化するので、その分加速度も発生している。下図は、速度 v で等速円運動している人工衛星が点 A から点 B に動いた時の速度の方向と大きさを示している。何れも接線方向の速度ベクトルである。図の右側には、点 A と点 B における人工衛星の速度ベクトルを出発点を同じにして描いた。この二つのベクトルのなす角度は、 $\angle AOB$ つまりこの図より速度の変化は、 $\Delta\theta$ に等しい。そして速度ベクトルの変化は、 Δv だけ発生したことになる。



時間あたりの速度の変化が解れば、加速度は求まる。点 A から点 B に移動するまでの時間が Δt だったとすると、加速度 α は、以下の式で表される。

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (38)$$

ここで、 $\Delta\theta$ が小さい時は、 Δv は半径 v の弧の長さで近似できることから $\Delta v \approx v\Delta\theta$ で表すことが出来る。また、 $\Delta\theta$ を角速度 ω を使って表すと、 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ となる。したがって、加速度 α は以下のように表すことが出来る。

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (39)$$

式 22 と同じ結果となった。

一方、式 30 の万有引力の法則は、 $F = m\alpha$ を利用し、以下の式が成り立つ。

$$m \frac{4\pi^2 r}{T^2} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (40)$$

式を整理すると次式を得る。

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (41)$$

これが、ケプラーの第三法則である。この意味は、公転周期の二乗と軌道半径の三乗とが比例関係にあるというものである。つまり、軌道半径が分かれば、公転周期が求まることを意味する。ケプラーが発見した法則をニュートンが見出した万有引力の法則によって説明することが出来た。

ところで、楕円運動でもケプラーの法則は成り立つのか心配であるが、同じ長半径の楕円軌道を描くものにおいては、細長くても円に近くても同じ周期となる。円運動の場合、地球の位置は円の中心となる。楕円となった場合、地球は一つの焦点に位置し、ケプラーの第二法則によって地球に近い時は速く、遠い時は遅く運動する。つまり、結果として長半径を円の半径とする軌道の周期と同じになるのである。したがってケプラーの第三法則は、公転周期の二乗と軌道長半径の三乗とが比例関係にあるということである。