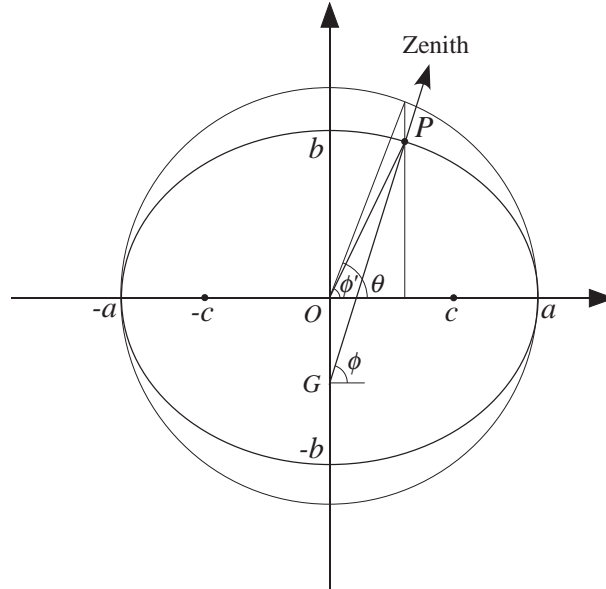


1 地理緯度と地心緯度との関係

地球の形が回転楕円体とすると、下図において点 P における緯度は、**地心緯度**と**地理緯度**の2つあることは既に述べた。地心緯度は、楕円体の中心を基準とする ϕ' である。一方地理緯度は、点 P における天頂の方向を逆に伸ばして出来る角度 ϕ である。



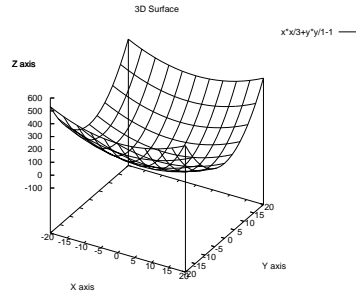
この天頂方向のベクトルは、楕円体上の P における**接平面** (tangential plane) の法線方向に等しい。したがって、地理緯度と地心緯度の関係を導くためには、楕円体上の法線ベクトルを求める計算からしなければならない。その後、点 P と点 G との距離を計算し、地理緯度 ϕ から点 P の座標を求めることができる。

1.1 楕円体上の法線ベクトルを求める

楕円体上の法線ベクトル (N_x, N_y) は、方程式型で表した楕円の関数を偏微分することによって導くことができる。まず、楕円の関数 $f(x, y)$ は、次式となる。

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \tag{1}$$

この関数をグラフ化すると、以下のような曲面になる。 $f(x, y) = 0$ なる曲線が、元の楕円である。



この曲面において, x, y でそれぞれ偏微分すると,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} \end{cases} \quad (2)$$

点 P の座標は, $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ なのでこれを代入し, 法線ベクトル (N_x, N_y) が得られる.

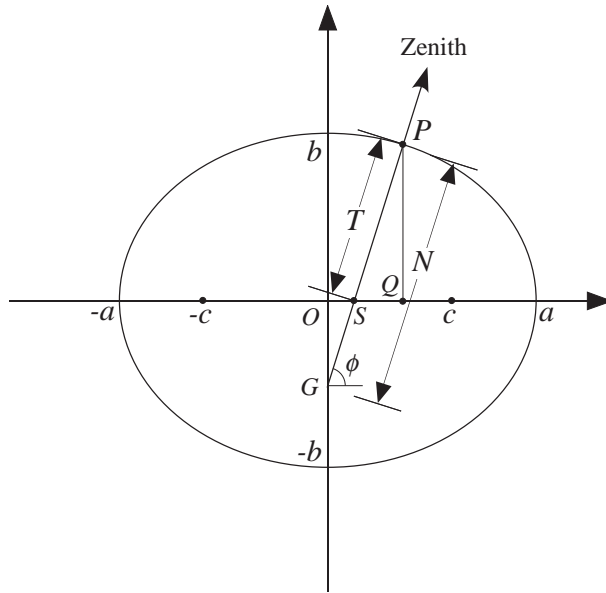
$$\begin{cases} N_x = \frac{2 \cos \theta}{a} \\ N_y = \frac{2 \sin \theta}{b} \end{cases} \quad (3)$$

したがって, 法線の式をパラメータ t で表すと以下の式を得る.

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos \theta}{a} t + a \cos \theta \\ y = \frac{2 \sin \theta}{b} t + b \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

1.2 卯酉線曲率半径を求める

地理緯度 ϕ から点 P の座標を求めるには, 下図のように P を通る法線において, y 軸との交点 G と P との距離 N が必要となる. この距離は, **卯酉線曲率半径** (radius of prime vertical circle) と呼ばれている. **曲率半径** (radius of curvature) は, ある曲線があったとき, ある曲線状の点における曲がり具合を表現するのに半径いくらの方の曲がり具合と一致するかをその半径で表すものである. 回転楕円体においては, その曲がり具合が, 子午線方向と卯酉線方向とで異なるので注意が必要である. N は, 卯酉線方向での曲率半径に一致している.



それにはまず G の座標を求めなければならない。G の x 座標は 0 なので、法線の式において $x = 0$ を満たす t を求め、それを y の式に代入すれば良い。すると y 座標の値は、次式を得る。

$$y = \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{b} \quad (5)$$

したがって、G を原点とすると、P の x 座標は $a \cos \theta$ 、y 座標は $b \sin \theta - \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{b}$ となり、N の長さは以下のように導くことができる。

$$\begin{aligned} N^2 &= (a \cos \theta)^2 + \left(b \sin \theta - \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta}{b} \right)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \theta + \frac{a^4}{b^2} \sin^2 \theta \\ &= \frac{a^4}{b^2} + \left(a^2 - \frac{a^4}{b^2} \right) \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (6)$$

上式において、N は θ で表されている。最終的には、地理緯度 ϕ で表す必要があるため、ここで ϕ と θ の関係を求めておく。それには、法線の傾きと $\tan \phi$ が等しいことを利用すると、次式を導くことができる。

$$\tan \phi = \frac{\frac{2 \sin \theta}{b}}{\frac{2 \cos \theta}{a}} = \frac{a}{b} \tan \theta \quad (7)$$

さらにこの式の両辺を二乗し、 $\cos^2 \theta$ を導くと、以下の式を得る。

$$\begin{aligned}\tan^2 \phi &= \frac{a^2}{b^2} \tan^2 \theta \\ &= \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) \\ \cos^2 \theta &= \frac{a^2}{b^2 \left(\tan^2 \phi + \frac{a^2}{b^2} \right)}\end{aligned}\tag{8}$$

式 6 の $\cos^2 \theta$ に、上式を代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}N^2 &= \frac{a^4}{b^2} + \left(a^2 - \frac{a^4}{b^2} \right) \frac{a^2}{b^2 \left(\tan^2 \phi + \frac{a^2}{b^2} \right)} \\ &= \frac{a^2(\tan^2 \phi + 1)}{\frac{b^2}{a^2} \tan^2 \phi + 1} \\ &= \frac{a^2(\tan^2 \phi + 1)}{\frac{b^2}{a^2}(\tan^2 \phi + 1) - \frac{b^2}{a^2} + 1} \\ &= \frac{a^2 \frac{1}{\cos^2 \phi}}{\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\cos^2 \phi} - \frac{b^2}{a^2} + 1} \\ &= \frac{a^2}{\frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} \right) \cos^2 \phi}\end{aligned}\tag{9}$$

次に、上式は、離心率 $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ を用いて整理すると、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}N^2 &= \frac{a^2}{\frac{a^2 - a^2 e^2}{a^2} + e^2 \cos^2 \phi} \\ &= \frac{a^2}{1 - e^2 + e^2 \cos^2 \phi} \\ &= \frac{a^2}{1 - e^2(1 - \cos^2 \phi)} \\ &= \frac{a^2}{1 - e^2 \sin^2 \phi}\end{aligned}\tag{10}$$

1.3 点 P の座標を ϕ を用いて計算する

次に求めた N を用いて、 T の長さを求める。 T は、P における法線において、P と x 軸の交点 S との距離である。これを求めるには、三角形 PSQ とその相似三角形 OGS の比を用いる。まず、OG:PQ は、 y 座標の値を利用して次式で表される。

$$\frac{b^2 - a^2}{b} \sin \theta : b \sin \theta = (b^2 - a^2) : b^2\tag{11}$$

ここで、 $a^2 > b^2$ のときは、 $(a^2 - b^2) : b^2$ となる。したがって、

$$(a^2 - b^2) : b^2 = (N - T) : T\tag{12}$$

これを整理すれば、次式を得る.

$$T = \frac{b^2}{a^2} N \quad (13)$$

最終的に点 P の座標を N と ϕ で表すと、以下のようになる.

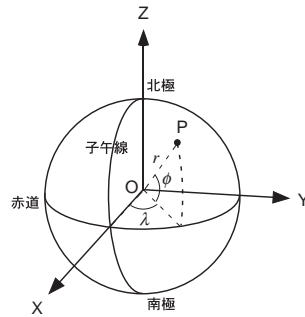
$$\begin{cases} x = N \cos \phi \\ y = \frac{b^2}{a^2} N \sin \phi \end{cases} \quad (14)$$

したがって地理緯度 ϕ と地心緯度 ϕ' の関係は、 $\tan \phi' = \frac{y}{x}$ より、次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \tan \phi' &= \frac{\frac{b^2}{a^2} N \sin \phi}{N \cos \phi} \\ &= \frac{b^2}{a^2} \tan \phi \end{aligned} \quad (15)$$

2 地球を回転楕円体とする緯度経度の座標変換

地理緯度を用いて子午線の面における座標計算が出来るようになったので、地理座標で表された緯度経度を三次元直角座標に変換することへと展開できる. 三次元直角座標における各軸は、前節と同様、以下の図のようになっている. つまり、 x 軸は子午線と赤道との交点への方向、 y 軸は経度 90° と赤道との交点への方向、 z 軸は北極方向とする.



回転楕円体上の点 P の地理緯度が ϕ 、経度が λ のとき、点 P の三次元座標 (x, y, z) を求めたい、このとき、点 P を y 軸回りに $-\phi$ 回転させて $x-z$ 平面と一致させたときの点 P の座標は、 $(N \cos \phi, 0, -\frac{b^2}{a^2} N \sin \phi)$ である. したがって、この座標を z 軸回りに $+\lambda$ 回転させて、元の位置に戻せば良い. これを回転行列を用いて表すと、以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \cos \phi \\ 0 \\ -\frac{b^2}{a^2} N \sin \phi \end{pmatrix} \quad (16)$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos \phi \cos \lambda \\ N \cos \phi \sin \lambda \\ -\frac{b^2}{a^2} N \sin \phi \end{pmatrix} \quad (17)$$

これにより、地理緯度と経度の値より、回転楕円体においても座標変換が可能である。