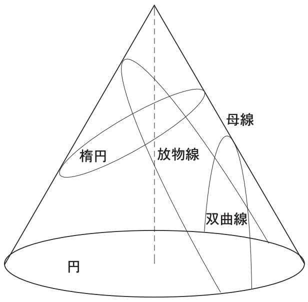
1　円錐曲線

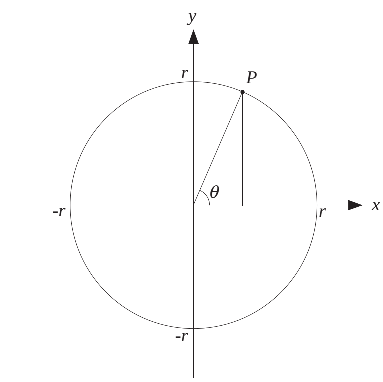
円・楕円・放物線・双曲線は，何れも二次曲線であり，円錐曲線の仲間である．**円錐曲線** (conic section) は，下図に示す通り，円錐形をまっすぐ切った切り口の形である．例えば，円錐形の軸に対して直角に切ると，切り口は円形となり，母線に対して平行に切ると，切り口は放物線となる．斜めに切ると，楕円か双曲線になるが，軸から母線の傾きまでの角度で切ると，双曲線になり，軸に対して母線の傾きよりも大きい角度で切ると，楕円になる．



円錐曲線は，測量の分野において，非常に重要なものである．例えば，地球の形を楕円で近似したり，物体の運動は，楕円・放物線・双曲線で近似したりしている．本章では，その円錐曲線について詳述する．

1.1　円と球

円 (circle) は，中心から同じ長さの点を繋いだものである．下図のように中心が原点で，半径 r の円を描いた．



この円上の点 P は，下の方程式を満足する点であり，ピタゴラスの定理（式**??**）と同じ式となる．

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

また，点 P は，x 軸からの角度 θ を用いて，三角関数で以下のように表すこともできる．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

なお θ は，いわゆる媒介変数である．つまり点 P の位置は，(x, y) 直交座標（デカルト座標）でなく，半径と角度の (r, θ) で表すこともできる．このような座標は**極座標**と呼ばれている．この極座標を使えば，円の周長や円の面積を積分で求めることが簡単になる．

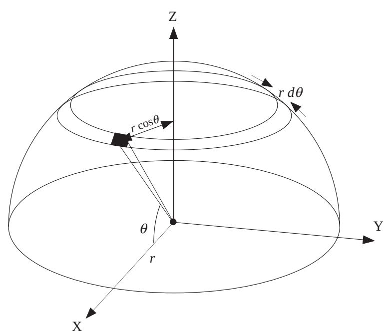
半径 r の円周の長さ L は，$L = 2\pi r$ という公式であるが，積分を用いて計算することができる．微小角度 $d\theta$ を用いると，弧の長さは $rd\theta$ で計算できるので，角度を 0 から 2π まで積分すれば求まる．

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} rd\theta \\ &= [r\theta]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r \end{aligned} \tag{3}$$

円の面積 S は，半径 0 から r まで円周の長さ $2\pi r$ を積分すれば求まる．

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r} 2\pi r dr \\ &= \left[2\pi \frac{1}{2} r^2\right]_0^r \\ &= \pi r^2 \end{aligned} \tag{4}$$

続いて，球の表面積と体積の計算について解説する．下図は，XYZ の三次元の直交座標を設定し，半径 r の半球を描いたものである．



球面を Z 軸に対して直角に切ったときの切り口の円の半径は，XY 平面からの角度を θ としたとき，$r\cos\theta$ となるので，その円周の長さは $2\pi r\cos\theta$ となる．そしてその円周に弧の長さ $rd\theta$ をかけたものが微小なドーナツ形の面積となる．これを 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分したものが半球の面積となり，球の面

積 S は，それを 2 倍したものである．

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r\cos\theta r d\theta \\
&= 4\pi r^2 \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi r^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

円の表面積は，後に述べる電場や磁場の強さを計算するときに用いられるので覚えておいた方が良い．

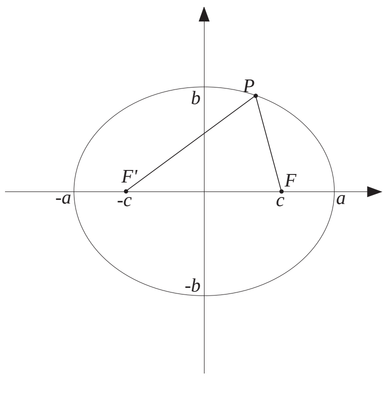
球の体積 V は，表面積が求まったので，半径 0 から r までの球の表面積を積分すれば求まる．

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^r 4\pi r^2 dr \\
&= \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_0^r \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
\tag{6}
$$

1.2 楕円

1.2.1 楕円の方程式

楕円 (Ellipsoid) には，二つの**焦点** (Focal Point)F と F' があり，2 つの焦点から距離の和が同じ点を繋いだものである．例えば，一本のひもの両端を結んで輪を作り，2 つの焦点にその輪をかけ，鉛筆でその輪をピンと張った状態で鉛筆を動かせば楕円が描ける．下図のように楕円の中心を原点とし，焦点を X 軸上に設けたとき，X 軸方向は半径が長く，y 軸方向は半径が短い．長い半径を**長半径** (Semi-major Axsis) といい a で表し，短い半径を**短半径** (Semi-minor Axis) といい b で表す．楕円上の点 P は，それぞれの焦点との距離 PF と PF' の合計は，常に $2a$ で一定である． なぜなら，点 P が x 軸上にあるとき，$PF = a - c$，$PF' = a + c$ であるから，$PF + PF' = 2a$ となるからである．また，y 軸上に来たときは，$PF = PF'$ となり，その長さは a となる．したがって，ピタゴラスの定理より，$b^2 + c^2 = a^2$ が成り立つ．



PF と PF' の距離を楕円上の座標 $P(x,y)$ と a,c を用いて表す．

$$PF = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{7}$$
$$PF' = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{8}$$

したがって，$PF+PF'=2a$ より次式を得る．

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{9}$$

この式の両辺を二乗して整理すると，

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx \tag{10}$$

さらに二乗して整理すると，

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{11}$$

次に，両辺を $a^2(a^2-c^2)$ で割ると，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{12}$$

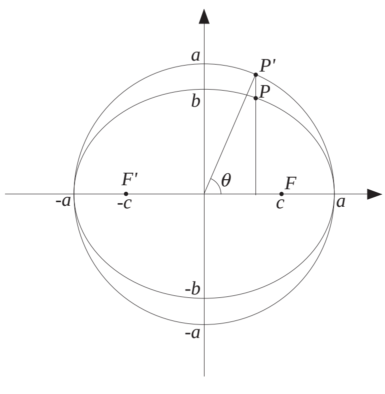
ここで，先の $b^2+c^2=a^2$ より，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{13}$$

1.2.2 楕円を媒介変数で表す

半径 a の円の方程式を媒介変数（パラメータ）で表す．下図において，半径 a の円周上の点 P' は，x 軸からの角度 θ をパラメータとすれば，x,y の座標は次式で表される．

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \tag{14}$$



次に，P' の x 軸への垂線の足と楕円との交点 P について考える．x 座標は変わらないが，y 座標は，P' と比べると $\frac{b}{a}$ だけ短くなっている．したがって，パラメータ形式で楕円は，次式で表すことができる．

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \tag{15}$$

これを証明してみよう．まず上式の両辺を二乗し，整理すると．

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta \end{cases} \tag{16}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が導かれる．

1.2.3 楕円の面積

楕円の面積は，方程式型の楕円の式より導く．式**??**より y について整理すると以下の式となる．

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{17}$$

したがって，これを 0 から a まで積分すれば，楕円の 1/4 の面積が計算できる．したがって，楕円の面積 S は，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx \\ &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \\ &= 4\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} \qquad \text{ここで } \sqrt{a^2 - x^2} \text{ は半径 } a \text{ の円の式と同じ} \\ &= \pi ab \end{aligned} \tag{18}$$

1.2.4 扁平率

楕円は，長半径 a と短半径 b の比により楕円の形が決まる．a と b の差が大きいほど細長い形となる．そこで，楕円の形を表現するのに**扁平率** (Oblateness) が使われる．扁平率 f は，次式で表される．

$$f = \frac{a - b}{a} \tag{19}$$

地球楕円体を表すときに扁平率が使われることが多い．

1.2.5 離心率

楕円の形を表すのに焦点の位置を使うことも出来る．楕円は，焦点が中心から離れるほど細長く，中心に近いほど円に近づく．したがって，長半径 a と焦点の位置 c の比によっても楕円の形が決ま

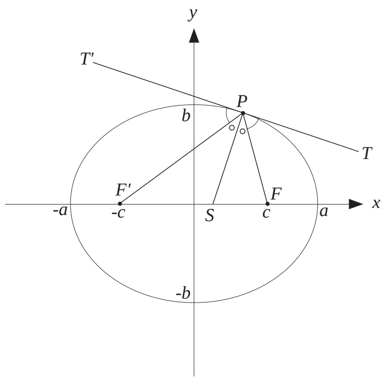
る．この比を**離心率** (Eccentricity) と呼んでいる．離心率 e は，次式で表される．

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \tag{20}$$

人工衛星の軌道や惑星の軌道を表す時は一般に離心率が使われる．楕円の焦点の位置が天体力学において極めて重要な位置であることに由来するからであろう．離心率 e は，0 に近いほど円に近く，1 に近づくほど細長い．ちなみに，e が 1 のときは**放物線** (Parabola) となり，1 を越えるときは**双曲線** (Hyperbola) となる．したがって，離心率から考えると，円と放物線は，非常に特殊な形と言える．そして，円・楕円・放物線・双曲線は，**円錐曲線** (Conic Section) と呼ばれている．

1.2.6　楕円の接線・法線

楕円上の点 $P(x_p, y_p)$ における接線と法線について考察する．下の図は，P において接線 TT' と法線 PS を描いた．



楕円上の法線ベクトル (N_x, N_y) は，方程式型で表した楕円の関数を偏微分することによって導くことができる．まず，楕円の関数 $f(x, y)$ は，次式となる．

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \tag{21}$$

この関数について，x, y でそれぞれ偏微分する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2} \end{cases} \tag{22}$$

点 P の座標は，媒介変数を用いると $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ なのでこれを代入し，法線ベクトル (N_x, N_y) が得られる．

$$\begin{cases} N_x = \dfrac{2\cos\theta}{a} \\ N_y = \dfrac{2\sin\theta}{b} \end{cases} \tag{23}$$

したがって，法線の式をパラメータ t で表すと以下の式を得る．

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\cos\theta}{a}t + a\cos\theta \\ \\ y = \dfrac{2\sin\theta}{b}t + b\sin\theta \end{cases} \tag{24}$$

ここで，S の x_s 座標を求めるため，上式において $y = 0$ とおき，t の値を求める．すると $t = -\frac{b^2}{2}$ となり，x_s 座標は，以下の式で計算できる．

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{b^2}{a}\cos\theta + a\cos\theta \\ &= \cos\theta\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right) & \cos\theta = \frac{x_p}{a} \text{ より} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2}x_p & \text{離心率 } e \text{ を用いると式??より} \\ &= e^2 x_p \end{aligned} \tag{25}$$

すると，$F'S$ 及び FS の長さは，以下の式で表すことができる．

$$F'S = ae + e^2x_p = e(a + ex_p) \tag{26}$$

$$FS = ae - e^2x_p = e(a - ex_p) \tag{27}$$

また，式??より以下の式を得る．

$$F'P = a + ex_p \tag{28}$$

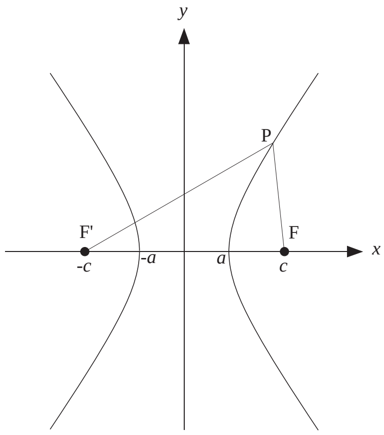
$$FP = a - ex_p \tag{29}$$

したがって，$F'S = eF'P$，$FS = eFP$ となり，PS は $\angle FPF'$ を二等分することを意味する．ところで，光や電波が平面で反射するときは，入射角と反射角が等しいという性質を持つ．これについては，5 章で解説する．もし，F' に光源があるとすると，そこから四方八方に出た光は，楕円によって反射された後，全てもう一方の焦点 F に集まることを意味する．

1.3 双曲線

1.3.1 双曲線の方程式

楕円は，焦点が長半径 a より大きくなることはないが，**双曲線** (Hyperbola) は，a の外側に焦点を持つ．したがって，離心率 e は 1 を越える．また双曲線は，楕円と描き方が異なり，2 つの焦点から距離の差が同じとなる点を繋いだものである．下図のように焦点を x 軸上に設けたとき，それぞれの焦点と双曲線上の点 P の距離 PF と PF' の差は，常に $2a$ で一定となるような曲線が双曲線である．



PF と PF' の距離を楕円上の座標 $P(x,y)$ と a,c を用いて表す．

$$PF = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{30}$$
$$PF' = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{31}$$

したがって，$PF - PF' = \pm 2a$ より次式を得る．

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{32}$$

この式の両辺を二乗して整理すると，

$$\mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx \tag{33}$$

さらに二乗して整理すると，

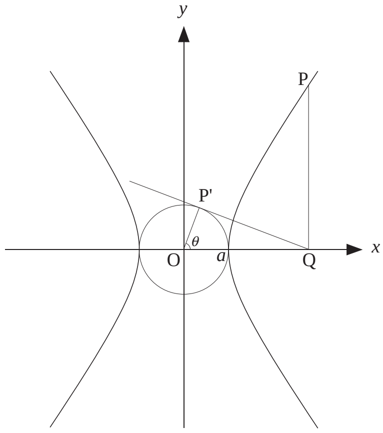
$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \tag{34}$$

ここで，$b^2 = c^2 - a^2$ とおくと，

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{35}$$

1.3.2 双曲線を媒介変数で表す

半径 a の円の方程式を媒介変数（パラメータ）で表す．下図において，原点を中心とし，半径 a の円周上に点 P' をおいた．P' において接線を引き，x 軸との交点を Q とする．



P' への角度 θ をパラメータとすれば，x 座標は次式で表される．

$$x = \frac{a}{\cos\theta} \tag{36}$$

次に，y 座標について考える．$x = \frac{a}{\cos\theta}$ を双曲線の式**??**に代入すると以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
y^2 &= b^2\left(1 - \frac{1}{\cos^2}\right) \\
&= b^2\left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2}\right) \\
&= b^2\tan^2\theta \\
y &= b\tan\theta
\end{aligned} \tag{37}$$

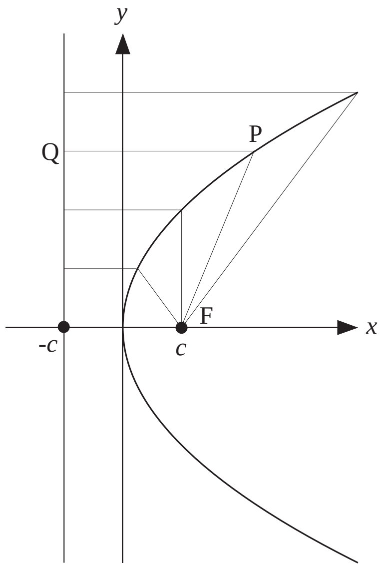
したがって，媒介変数 θ で双曲線を表すと，以下の式となる．

$$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases} \tag{38}$$

1.4 放物線

1.4.1 放物線の方程式

放物線 (Parabola) は，離心率 e が 0 のときの曲線である．下図は，その放物線を描いたものである．放物線上の点 P は，PF の長さと PQ の長さが等しい．



PF と PQ の長さを式で表すと，次のようになる．

$$PQ = x + c \tag{39}$$

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{40}$$

$PQ = PF$ なので，放物線は，以下の式で表すことができる．

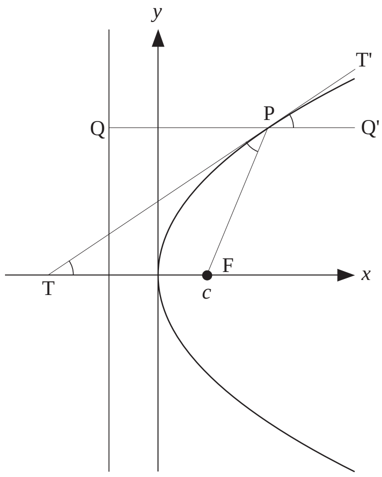
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x + c$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$

$$y^2 = 4cx \tag{41}$$

1.4.2　放物線の接線

放物線上の点 $P(x_p, y_p)$ における接線について考察する．下の図は，P において接線 TT' と x 軸に平行な QQ' を描いた．



放物線の方程式は $y^2 = 4cx$ である．y についての式にすると右辺に平方根が現れ，計算が複雑になるため，x について整理した方が都合が良い．すると放物線の方程式は，以下のようになる．

$$x = \frac{1}{4c}y^2 \tag{42}$$

この x について，y で微分することによって，接線の傾きを計算することができる．

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2c}y \tag{43}$$

したがって，$P(x_p, y_p)$ における接線の傾きは，$\frac{1}{2c}y_p$ となる．この傾きを持つ接線の方程式は，x 軸との切片を b とすると，$x = \frac{1}{2c}y_p y + b$ となる．この接線は，$P(x_p, y_p)$ を通るので，この座標を接線の方程式に代入し，切片 b を求めると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{1}{2c}y_p^2 + b \\ b &= x_p - \frac{1}{2c}y_p^2 \\ &= x_p - 2x_p \\ &= -x_p \end{aligned} \tag{44}$$

したがって，TF の長さは，$x_p + c$ となる．また，PQ の長さも $x_p + c$ であり，これは PF とも等しい．よって三角形 TFP は二等辺三角形といえる．さらに $\angle TPQ'$ と $\angle PTF$ は，同位角の関係にあるため等しいことから，$\angle TPQ' = \angle TPF$ となる．ところで，楕円の項でも述べたが，光や電波が平面で反射するときは，入射角と反射角が等しいという性質を持つ．このことは，x 軸に平行に飛んでくる光や電波は，放物線にぶつかると，すべて焦点に集まることを意味する．遠くから飛んで来る光や電波は，ほぼ平行に飛んでいるといえ，衛星放送を受信するためのアンテナの形状が放物線となっているのは，電波を焦点に集めるためである．