非線形変換式による幾何補正

1　級数展開

1.1　テイラー (Taylor) 級数

関数 $f(x)$ に関して，テイラー級数に展開すると以下のようになる．

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{1}$$

ここで，$f^{(n)}(a)$ は，$f(a)$ の n 階導関数を表している．

1.2　マクローリン (Maclaurin) 級数

テイラー展開によって得られる級数に関して，特に $a = 0$ のときの級数は，マクローリン級数と呼ばれている．

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{2}$$

この級数展開を使えば，微分可能な関数であれば，複雑な式も単純な計算で導ける．

1.3　テイラー展開による三角関数の計算

例えば，三角関数に関して，マクローリン級数に展開すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\ &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \qquad (3) \\ \cos(x) &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \qquad (4) \end{aligned}$$

したがって，任意の角度 $x(\mathrm{radian})$ での三角関数の値を計算できることになる．例えば，$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ を求めるとき，7 階導関数までで近似させると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &\approx \frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \qquad (5) \\ &\approx 0.785398163 - 0.080745512 + 0.002490395 - 0.00003658 \\ &\approx 0.70710647 \qquad (6) \end{aligned}$$

なお電卓では，$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707106781$ という値であった．したがって，小数第六位まで近似できている．

1.4　オイラーの公式を導出する

ここで，指数関数 e^x について，マクローリン級数により展開する．

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \tag{7}$$

次に，e^{ix} について，マクローリン級数により展開し，実数部と虚部に分ける．すると，実数部は cos の級数展開，虚部は sin の級数展開と同じになり，オイラーの公式を導くことが出来る．

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ix} &= 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned} \tag{8}$$

2　最小二乗法による非線形変換式の決定

画像の座標ではなく，測量した値を座標変換する場合は，縮尺を考慮する必要がないので，回転と原点移動だけの変換で十分である．これを式で表すと以下のようになる．

$$\begin{cases} x &= u\cos\kappa - v\sin\kappa + x_0 \\ y &= u\sin\kappa + v\cos\kappa + y_0 \end{cases} \tag{9}$$

したがって，未知数の個数は 3 個となり，最低 2 個の基準点データで変換式を決定できることになる．しかし，アフィン変換やヘルマート変換が線形の式であったのに対し，座標回転を導入すると三角関数が含まれる非線形の式となる，基準点 2 個のデータより回転角を求めるのは簡単であるが，2 個を越える基準点データから最小二乗法を用いて回転角を求めるには，非線形方程式なので通常の連立方程式で解くことは出来ない．したがって，テイラー展開を使って逐次計算をすることにより近似値を求めることになる．

そのためにはまず，変換式を次のように関数として置き換える．

$$F_x(x_0, \kappa) = u\cos\kappa - v\sin\kappa + x_0 - x \tag{10}$$

$$F_y(y_0, \kappa) = u\sin\kappa + v\cos\kappa + y_0 - y \tag{11}$$

各未知係数の近似値を x_{00}, y_{00}, κ_0 とし，各補正量を $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta\kappa$ とすると，未知係数は，以下の式で表すことが出来る．

$$x_0 = x_{00} - \Delta x_0 \tag{12}$$

$$y_0 = y_{00} - \Delta y_0 \tag{13}$$

$$\kappa = \kappa_0 - \Delta\kappa \tag{14}$$

関数 F_x, F_y において，近似値の周りにテイラー展開する．つまりテイラー級数（式 1）において，$x = x_0, a = x_{00}$ とおく．すると，$x_0 - x_{00} = -\Delta x_0$ となる．他の変数 y_0, κ についても同様に考え，

多変数の関数なので偏微分を用いると以下の式が得られる．なお，級数における二階導関数の項以降は無視できるものとしている．

$$F_x(x_0,\kappa) \approx F_x(x_{00},\kappa_0) - \frac{\partial F_x}{\partial x_0}\Delta x_0 - \frac{\partial F_x}{\partial \kappa}\Delta\kappa \tag{15}$$

$$F_y(y_0,\kappa) \approx F_y(y_{00},\kappa_0) - \frac{\partial F_y}{\partial y_0}\Delta y_0 - \frac{\partial F_y}{\partial \kappa}\Delta\kappa \tag{16}$$

テイラー展開による微係数は，以下のように計算される．

$$\frac{\partial F_x}{\partial x_0} = 1 \tag{17}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y_0} = 1 \tag{18}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \kappa} = -u\sin\kappa - v\cos\kappa \tag{19}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \kappa} = u\cos\kappa - v\sin\kappa \tag{20}$$

したがって，

$$F_x(x_0,\kappa) \approx F_x(x_{00},\kappa_0) - \Delta x_0 + (u\sin\kappa + v\cos\kappa)\Delta\kappa \tag{21}$$

$$F_y(y_0,\kappa) \approx F_y(y_{00},\kappa_0) - \Delta y_0 - (u\cos\kappa - v\sin\kappa)\Delta\kappa \tag{22}$$

さて，n 個の基準点データ $(u_1,v_1,x_1,y_1),\cdots,(u_n,v_n,x_n,y_n)$ を用いて，最小二乗法と逐次計算により x_0,y_0,κ を求める手順について解説する．

まず，x_{00},y_{00},κ_0 の初期値と基準点データを式 22, 23 に代入する．なお微係数の式にも x_{00},y_{00},κ_0 の初期値を代入する．すると，F_x,F_y それぞれについて，n 個の式が出来る．基準点に誤差がなければ，$F_x=0,F_y=0$ となるが，誤差は必ず存在する．そして誤差の値は，計算された F_x,F_y の値そのものとなる．この誤差の二乗和が最小となるような $\Delta x_0,\Delta y_0,\Delta\kappa$ を求めなければならない．ここで，この誤差関数 E は，以下の式となる．

$$\begin{aligned}E = &\sum_{i=1}^{n}\left\{F_x(x_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta x_0 + (u_i\sin\kappa_0 + v_i\cos\kappa_0)\Delta\kappa\right\}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left\{F_y(y_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta y_0 - (u_i\cos\kappa_0 - v_i\sin\kappa_0)\Delta\kappa\right\}^2\end{aligned} \tag{23}$$

したがって，この誤差関数を $\Delta x_0,\Delta y_0,\Delta\kappa$ で偏微分し，偏微分した関数の値が 0 となる $\Delta x_0,\Delta y_0,\Delta\kappa$

を連立方程式を解くことによって求めれば良い．

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left\{F_x(x_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta x_0 + (u_i \sin\kappa_0 + v_i\cos\kappa_0)\Delta\kappa\right\} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta y_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left\{F_y(y_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta y_0 - (u_i \cos\kappa_0 - v_i\sin\kappa_0)\Delta\kappa\right\} = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \Delta \kappa} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left\{(u_i\cos\kappa_0 - v_i\sin\kappa_0)(F_x(x_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta x_0 + (u_i \sin\kappa_0 + v_i\cos\kappa_0)\Delta\kappa)\right\}\\ &\quad -2\sum_{i=1}^{n}\left\{(u_i\sin\kappa_0 + v_i\cos\kappa_0)(F_y(y_{00},\kappa_0,u_i,v_i,x_i,y_i) - \Delta y_0 - (u_i \cos\kappa_0 - v_i\sin\kappa_0)\Delta\kappa)\right\} = 0\end{aligned} \tag{26}$$

ここで，問題となるのが初期値の値である．x_{00}, y_{00} については，最初の基準点座標の差を利用することが出来る．また κ は，二つの基準点座標から，その線分の傾きの差を利用する．

$$x_{00} = x_1 - u_1 \tag{27}$$

$$y_{00} = y_1 - u_v \tag{28}$$

$$\kappa_0 = \tan^{-1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \tan^{-1}\frac{v_2 - v_1}{v_2 - v_1} \tag{29}$$

初期値を代入して，最小二乗法により求まった補正量 $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta\kappa$ が求まれば，初期値から補正量を差し引くことで，１回目の近似値が求まる．さらにこの近似値を用いて２回目の補正量を求め，さらに近似値を求めて行く．この繰り返し計算を求める解の精度を満足するまで行う．